Aufgabe H19T2A4 (12 Punkte)

Seien S_3 die symmetrische Gruppe auf $\{1,2,3\}$ und $G = S_3 \times S_3$.

(a) Man zeige, dass G genau eine 3-Sylowgruppe hat.

(b) Man gebe drei verschiedene 2-Sylowgruppen P, Q und R von G an, so dass $|P \cap Q| = 1$ ist, aber $|P \cap R| > 1$ gilt.

Hinweis/Kommentar:

Für Teil (a) verwenden Sie $A_3 \trianglelefteq S_3$ und den Zweiten Sylowsatz (genauer gesagt, die Folgerung, nach der eine p-Sylowgruppe genau dann Normalteiler ist, wenn sie die einzige p-Sylowgruppe ist). Die 2-Sylowgruppen von G sind natürlich die Untergruppen der Ordnung 4. Es ist nicht schwierig, für Teil (b) drei passende Untergruppen der Ordnung 4 zusammenzubekommen (sehr viele solche Untergruppen gibt es nicht).