Aufgabe H19T2A4 (12 Punkte)

Seien S_3 die symmetrische Gruppe auf $\{1, 2, 3\}$ und $G = S_3 \times S_3$.

(a) Man zeige, dass G genau eine 3-Sylowgruppe hat.

(b) Man gebe drei verschiedene 2-Sylowgruppen P, Q und R von G an, so dass $|P \cap Q| = 1$ ist, aber $|P \cap R| > 1$ gilt.

Lösung:

zu (a) Wegen $|S_3| = 3! = 6$ gilt $|G| = |S_3|^2 = 6^2 = 36 = 2^2 \cdot 3^2$. Die 3-Sylowgruppen von G sind also genau die Untergruppen der Ordnung 9. Insbesondere ist $N = A_3 \times A_3$ eine 3-Sylowgruppe von G, denn bekanntlich ist $|A_3| = 3$, und daraus folgt $|N| = |A_3|^2 = 9$. Um zu zeigen, dass N ein Normalteiler von G ist, seien $(\sigma_1, \sigma_2) \in G$ und $(\tau_1, \tau_2) \in N$ vorgegeben, mit $\sigma_1, \sigma_2 \in S_3$ und $\tau_1, \tau_2 \in A_3$. Wegen $(S_3 : A_3) = 2$ ist A_3 ein Normalteiler von S_3, somit gilt $\sigma_i \tau_i \sigma_i^{-1} \in A_3$ für $i = 1, 2$. Daraus folgt

$$(\sigma_1, \sigma_2) \cdot (\tau_1, \tau_2) \cdot (\sigma_1, \sigma_2)^{-1} = (\sigma_1, \sigma_2) \cdot (\tau_1, \tau_2) \cdot (\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}) = (\sigma_1 \tau_1 \sigma_1^{-1}, \sigma_2 \tau_2 \sigma_2^{-1}) \in A_3 \times A_3 ,$$

und somit ist $N \trianglelefteq G$ nachgewiesen. Aus dem Zweiten Sylowsatz folgt, dass eine 3-Sylowgruppe von G, die Normalteiler von G ist, die einzige 3-Sylowgruppe von G sein muss. Dies zeigt, dass G genau eine 3-Sylowgruppe besitzt.

zu (b) Wegen $|G| = 2^2 \cdot 3^2$ sind die 2-Sylowgruppen von G genau die Untergruppen der Ordnung 4. Wegen $\langle (1\ 2) \rangle = \{\mathrm{id}, (1\ 2)\}$ und $\langle (1\ 3) \rangle = \{\mathrm{id}, (1\ 3)\}$ sind durch

$$P = \langle (1\ 2) \rangle \times \langle (1\ 2) \rangle = \{(\mathrm{id}, \mathrm{id}), (\mathrm{id}, (1\ 2)), ((1\ 2), \mathrm{id}), ((1\ 2), (1\ 2))\}$$
$$Q = \langle (1\ 3) \rangle \times \langle (1\ 3) \rangle = \{(\mathrm{id}, \mathrm{id}), (\mathrm{id}, (1\ 3)), ((1\ 3), \mathrm{id}), ((1\ 3), (1\ 3))\}$$
$$R = \langle (1\ 2) \rangle \times \langle (1\ 3) \rangle = \{(\mathrm{id}, \mathrm{id}), (\mathrm{id}, (1\ 3)), ((1\ 2), \mathrm{id}), ((1\ 2), (1\ 3))\}$$

drei verschiedene 2-Sylowgruppen von G gegeben. Dabei gilt $P \cap Q = \{(\mathrm{id}, \mathrm{id})\}$ und $P \cap R = \{(\mathrm{id}, \mathrm{id}), ((1\ 2), \mathrm{id})\}$, also $|P \cap Q| = 1$ und $|P \cap R| = 2 > 1$.