Aufgabe H19T2A3 (12 Punkte)

Seien $a \in \mathbb{Q}$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i = \sqrt{-1}$ und $\gamma = a + \beta i$ algebraisch über $\mathbb{Q}$. Man zeige, dass $[\mathbb{Q}(\gamma) : \mathbb{Q}]$ gerade ist.

Lösung:

Zunächst bemerken wir, dass $\mathbb{Q}(\gamma) = \mathbb{Q}(i\beta)$ gilt, denn wegen $a \in \mathbb{Q}$ ist $i\beta = \gamma - a \in \mathbb{Q}(\gamma)$ und $\gamma = a + i\beta \in \mathbb{Q}(i\beta)$. Es genügt also zu zeigen, dass $[\mathbb{Q}(i\beta) : \mathbb{Q}]$ gerade ist. Wegen $-(i\beta)^2 = -(-\beta^2) = \beta^2 \in \mathbb{Q}(i\beta)$ ist $\mathbb{Q}(\beta^2)$ ein Zwischenkörper von $\mathbb{Q}(i\beta)|\mathbb{Q}$. Das Polynom $f = x^2 + \beta^2 \in \mathbb{Q}(\beta^2)[x]$ ist normiert und hat $i\beta$ als Nullstelle. Außerdem ist es irreduzibel, denn andernfalls wären wegen $\mathrm{grad}(f) = 2$ die beiden Nullstellen $\pm i\beta$ in $\mathbb{Q}(\beta^2)$ enthalten. Dies ist aber unmöglich, denn wegen $\beta \in \mathbb{R}$ gilt $\mathbb{Q}(\beta^2) \subseteq \mathbb{R}$, wegen $\beta \neq 0$ aber andererseits $\pm i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Ingesamt ist f damit das Minimalpolynom von $-i\beta$ über $\mathbb{Q}(\beta^2)$, und es folgt

$$[\mathbb{Q}(i\beta) : \mathbb{Q}(\beta^2)] \quad = \quad [\mathbb{Q}(\beta^2)(i\beta) : \mathbb{Q}(\beta^2)] \quad = \quad \mathrm{grad}(f) \quad = \quad 2.$$

Weil die über $\mathbb{Q}$ algebraischen komplexen Zahlen laut Vorlesung einen Teilkörper von $\mathbb{C}$ bilden (und jede rationale Zahl algebraisch über $\mathbb{Q}$ ist), ist mit γ auch das Element $i\beta$ algebraisch über $\mathbb{Q}$. Daraus folgt, dass der Erweiterungsgrad $[\mathbb{Q}(i\beta) : \mathbb{Q}]$ endlich ist. Wir können nun die Gradformel anwenden und erhalten

$$[\mathbb{Q}(i\beta) : \mathbb{Q}] \quad = \quad [\mathbb{Q}(i\beta) : \mathbb{Q}(\beta^2)] \cdot [\mathbb{Q}(\beta^2) : \mathbb{Q}] \quad = \quad 2 \cdot [\mathbb{Q}(\beta^2) : \mathbb{Q}].$$

Dies zeigt, dass $[\mathbb{Q}(i\beta) : \mathbb{Q}]$ gerade ist.