Aufgabe H19T2A2 (12 Punkte)

Sei $f \in \mathbb{Z}[x]$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten.

(a) Man zeige für alle $a, c \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$: Aus $a \equiv c \mod n$ folgt $f(a) \equiv f(c) \mod n$.

(b) Man zeige: Sind $f(0)$ und $f(2019)$ ungerade, dann hat f keine ganzzahligen Nullstellen.

(c) Seien p und q zwei verschiedene Primzahlen. Man zeige: Gibt es ein $a \in \mathbb{Z}$, so dass $f(a)$ nicht durch p teilbar ist, und ein $b \in \mathbb{Z}$, so dass $f(b)$ nicht durch q teilbar ist, dann gibt es ein $c \in \mathbb{Z}$, so dass $f(c)$ weder durch p noch durch q teilbar ist.
Hinweis: Man verwende den Chinesischen Restsatz.

Hinweis/Kommentar:

Für Teil (a) kann man zum Beispiel den Zusammenhang zwischen Kongruenzen mod n und Gleichungen im Restklassenring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ verwenden, der aus der Vorlesung bekannt ist. Alternativ könnte man auch ausnutzen, dass Kongruenzen verträglich mit Addition und Multiplikation sind, d.h. aus $a \equiv c \mod n$ und $b \equiv d \mod n$ folgen $a + b \equiv c + d \mod n$ und $ab \equiv cd \mod n$.

In Teil (b) wendet man Teil (a) auf $n = 2$ an. In Teil (c) muss man noch einmal mit dem bereits angesprochenen Zusammenhang zwischen Kongruenzen und Restklassenringen arbeiten. Denn die Aussagen in der Aufgabenstellung lassen sich in Kongruenzen übersetzen, während der Chinesische Restsatz normalerweise als Aussage über Restklassenring (allgemeiner Faktorringe) formuliert wird (Existenz eines Ringisomorphismus $\bar{\phi} : \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ mit $\bar{\phi}(c + pq\mathbb{Z}) = (c + p\mathbb{Z}, c + q\mathbb{Z})$ für alle $c \in \mathbb{Z}$).