**Aufgabe H19T1A4** (12 Punkte)

Sei $G$ eine nicht abelsche Gruppe der Ordnung $715 = 5 \cdot 11 \cdot 13$. Zeigen Sie:

(a) Es ist 5 die einzige Primzahl, für die die Anzahl der $p$-Sylowgruppen von $G$ echt größer als 1 ist.

(b) Sei $p$ die Primzahl aus Aufgabenteil (a) und sei $P$ eine $p$-Sylowgruppe von $G$. Bestimmen Sie den Isomorphietyp des Normalisators von $P$ gegeben durch

$$N_G(P) \quad = \quad \{g \in G \mid ghg^{-1} \in P \text{ für alle } h \in P\}.$$

*Hinweis/Kommentar:*

zu (a) Dass die Anzahl $\nu_p$ für alle Primzahlen bis auf eventuell eine gleich 1 ist, folgt unmittelbar aus dem Dritten Sylowsatz. Um zu zeigen, dass für die verbleibende Primzahl $p$ die Ungleich $\nu_p > 1$ gilt, weist man nach, dass $G$ andererfalls isomorph zu einem äußeren direkten Produkt der 5-, 11- und 13-Sylowgruppe ist. Daraus würde dann folgen, dass $G$ abelsch ist, im Widerspruch zur Voraussetzung.

zu (b) Die Ordung von $N_G(P)$ erhält man über die Gleichung $(G : N_G(P)) = \nu_p$. (Diese war beim Beweis der Sylowsätze als „Nebenprodukt“ herausgekommen und ergibt sich auch aus der Tatsache, dass $G$ für jede Primzahl $p$ auf der Menge seiner $p$-Sylowgruppen jeweils transitiv operiert.) Den Isomorphietyp ermittelt man durch (nochmalige) Anwendung der Sylowsätze, diesmal auf die Gruppe $N_G(P)$.