Aufgabe H19T1A4 (12 Punkte)

Sei G eine nicht abelsche Gruppe der Ordnung $715 = 5 \cdot 11 \cdot 13$. Zeigen Sie:

(a) Es ist 5 die einzige Primzahl, für die die Anzahl der p-Sylowgruppen von G echt größer als 1 ist.

(b) Sei p die Primzahl aus Aufgabenteil (a) und sei P eine p-Sylowgruppe von G. Bestimmen Sie den Isomorphietyp des Normalisators von P gegeben durch

$$N_G(P) \quad = \quad \{g \in G \mid ghg^{-1} \in P \text{ für alle } h \in P\}.$$

Lösung:

zu (a) Für jede Primzahl p sei ν_p die Anzahl der p-Sylowgruppen von G. Ist p kein Teiler von 715, dann ist p^0 die größte p-Potenz, die $|G|$ teilt, und folglich sind die p-Sylowgruppen genau die Untergruppen der Ordnung $p^0 = 1$. Es ist $\{e_G\}$ dann also die einzige p-Sylowgruppe von G, und daraus folgt $\nu_p = 1$. Für alle Primzahlen $p \notin \{5, 11, 13\}$ gilt also $\nu_p = 1$.

Betrachten wir nun die Primzahlen 11 und 13. Auf Grund des Dritten Sylowsatzes gilt $\nu_{11} \mid 5 \cdot 13$, also $\nu_{11} \in \{1, 5, 13, 65\}$, außerdem $\nu_{11} \equiv 1 \mod 11$. Wegen $5 \not\equiv 1 \mod 11$, $13 \equiv 2 \not\equiv 1 \mod 11$ und $65 \equiv 5 \cdot 13 \equiv 5 \cdot 2 \equiv 10 \not\equiv 1 \mod 11$ folgt $\nu_{11} = 1$. Ebenso gilt $\nu_{13} \mid 5 \cdot 11$, also $\nu_{13} \in \{1, 5, 11, 55\}$, außerdem $\nu_{13} \equiv 1 \mod 13$. Wegen $5, 11 \not\equiv 1 \mod 13$ und $55 \equiv 3 \not\equiv 1 \mod 13$ folgt $\nu_{13} = 1$. Die einzige Primzahl p, für die möglicherweise $\nu_p > 1$ gilt, ist also 5. Es bleibt zu zeigen, dass $\nu_5 > 1$ tatsächlich erfüllt ist.

Sei dazu P_{11} die einzige 11- und P_{13} die einzige 13-Sylowgruppe. Aus dem Zweiten Sylowsatz und $\nu_{11} = \nu_{13} = 1$ folgt, dass P_{11} und P_{13} beides Normalteiler von G sind. Wegen $|G| = 5^1 \cdot 11^1 \cdot 13^1$ gilt nach Definition der Sylowgruppen außerdem $|P_{11}| = 11$ und $|P_{13}| = 13$. Weiter sei $U = P_{11}P_{13}$, das Komplexprodukt von P_{11} und P_{13}; wegen $P_{11} \trianglelefteq G$ handelt es sich dabei um eine Untergruppe von G. Wir zeigen, dass U ein inneres direktes Produkt von P_{11} und P_{13} ist. Wegen $P_{11}, P_{13} \trianglelefteq G$ gilt zunächst auch $P_{11}, P_{13} \trianglelefteq U$. Außerdem ist $P_{11} \cap P_{13} = \{e_G\}$, weil die Ordnungen $|P_{11}| = 11$ und $|P_{13}| = 13$ teilerfremd sind. Zusammen mit $U = P_{11}P_{13}$ sind damit alle Bedingungen für ein inneres direktes Produkt verifiziert, und es folgt $U \cong P_{11} \times P_{13}$. Weil P_{11} und P_{13} als Gruppen von Primzahlordnung zyklisch und damit abelsch sind, ist auch $P_{11} \times P_{13}$ und damit U eine abelsche Gruppe.

Nehmen wir nun an, es gilt $\nu_5 = 1$, und sei N die einzige 5-Sylowgruppe von G. Dann ist N nach dem Zweiten Sylowsatz ebenfalls ein Normalteiler von G. Wir zeigen, dass G ein inneres direktes Produkt von U und N ist. Sei dazu $V = UN$. Wegen $N \trianglelefteq G$ und $N \subseteq V$ gilt auch $N \trianglelefteq V$. Wegen $P_{11}, P_{13} \trianglelefteq G$ ist auch $U = P_{11}P_{13}$ ein Normalteiler von G, und wegen $U \subseteq V$ also auch ein Normalteiler von V. Außerdem gilt $U \cap N = \{e_G\}$, weil die Ordnungen $|N| = 5$ und $|U| = |P_{11} \times P_{13}| = |P_{11}| \cdot |P_{13}| = 11 \cdot 13$ teilerfremd sind. Insgesamt ist V somit ein inneres direktes Produkt von U und N. Nun sind $|U| = 11 \cdot 13 = 143$ und $|N| = 5$ wegen $U \leq V$ und $N \leq V$ beides Teiler von $|V|$. Somit ist auch $\mathrm{kgV}(143, 5) = 143 \cdot 5 = 715$ ein Teiler von $|V|$. Aus $V \subseteq G$ und $|V| \geq 715 = |G|$ folgt $V = G$. Damit ist insgesamt nachgewiesen, dass G ein inneres direktes Produkt von U und N ist. Es folgt $G \cong U \times N$. Weil N die Primzahlordnung 5 hat, handelt es sich um eine zyklische, und damit abelsche Gruppe. Da auch U abelsch ist, sind sowohl $U \times N$ als auch G abelsch. Aber dies steht im Widerspruch zu unseren Voraussetzungen. Also war die Annahme $\nu_5 = 1$ falsch, und folglich muss $\nu_5 > 1$ gelten.

zu (c) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass für jede Primzahl p und jede p-Sylowgruppe P die Anzahl ν_p der p-Sylowgruppen mit dem Index des Normalisators $N_G(P)$ durch $\nu_p = (G : N_G(P))$ zusammenhängt. Ist P eine 5-Sylowgruppe unserer Gruppe G, dann gilt also $(G : N_G(P)) = \nu_5$. Aus dem Dritten Sylowsatz folgt $\nu_5 \mid 11 \cdot 13$, also $\nu_5 \in \{1, 11, 13, 143\}$, außerdem $\nu_5 \equiv 1 \bmod 5$. Wegen $13 \equiv 3 \not\equiv 1 \bmod 5$ und $143 \equiv 11 \cdot 13 \equiv 1 \cdot 3 \equiv 3 \not\equiv 1 \bmod 5$ folgt $\nu_5 \in \{1, 11\}$. Im Fall $\nu_5 = 1$ wäre P nach dem Zweiten Sylowsatz ein Normalteiler von G der Ordnung 5, was in Teil (b) ausgeschlossen wurde. Also muss $\nu_5 = 11$ gelten. Es folgt $(G : N_G(P)) = 11$ und $|N_G(P)| = \frac{|G|}{(G:N_G(P))} = \frac{715}{11} = 65 = 5 \cdot 13$.

Für jede Primzahl p sei nun μ_p die Anzahl der p-Sylowgruppen von $N_G(P)$. Aus dem Dritten Sylowsatz folgt $\mu_{13} \mid 5$, also $\mu_{13} \in \{1, 5\}$, und $\mu_{13} \equiv 1 \bmod 13$. Wegen $5 \not\equiv 1 \bmod 13$ folgt $\mu_{13} = 1$. Ebenso gilt $\mu_5 \mid 13$, also $\mu_5 \in \{1, 13\}$, und $\mu_5 \equiv 1 \bmod 5$. Wegen $13 \equiv 3 \not\equiv 1 \bmod 5$ folgt $\mu_5 = 1$. Sei nun Q_5 die einzige 5- und Q_{13} die einzige 13-Sylowgruppe von $N_G(P)$. Wir zeigen, dass $N_G(P)$ ein inneres direktes Produkt von Q_5 und Q_{13} ist.

Sei dazu $R = Q_5 Q_{13}$. Auf Grund des Zweiten Sylowsatzes und wegen $\mu_5 = \mu_{13} = 1$ folgt $Q_5, Q_{13} \trianglelefteq N_G(P)$ und damit auch $Q_5, Q_{13} \trianglelefteq R$. Auf Grund der Teilerfremdheit von $|Q_5| = 5$ und $|Q_{13}| = 13$ gilt $Q_5 \cap Q_{13} = \{e_G\}$. Also ist R ein inneres direktes Produkt von Q_5 und Q_{13}, und es folgt $R \cong Q_5 \times Q_{13}$. Wegen $|R| = |Q_5 \times Q_{13}| = |Q_5| \cdot |Q_{13}| = 5 \cdot 13 = |N_G(P)|$ gilt auch $N_G(P) = R \cong Q_5 \times Q_{13}$. Als Gruppen der Primzahlordnungen sind Q_5 und Q_{13} zyklisch, es gilt also $Q_5 \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ und $Q_{13} \cong \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$. Mit dem Chinesischen Restsatz folgt wegen $\mathrm{ggT}(5, 13) = 1$ schließlich $N_G(P) \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/65\mathbb{Z}$. Also ist $\mathbb{Z}/65\mathbb{Z}$ der gesuchte Isomorphietyp des Normalisators von P.