Aufgabe H19T1A3 (12 Punkte)

Sei $L|K$ eine Körpererweiterung. Sei $\alpha \in L$ algebraisch über K und sei $f_\alpha \in K[x]$ das Minimalpolynom von α. Zeigen Sie: Ist $\operatorname{grad}(f_\alpha)$ ungerade, so gilt $K(\alpha) = K(\alpha^2)$.

Lösung:

Nehmen wir an, dass $\operatorname{grad}(f_\alpha)$ ungerade ist, zugleich aber $K(\alpha) \neq K(\alpha^2)$ gilt. Wegen $\alpha^2 \in K(\alpha)$ ist $K(\alpha^2) \subseteq K(\alpha)$ auf jeden Fall erfüllt; unter unserer Annahme muss also $K(\alpha^2) \subsetneq K(\alpha)$ gelten. Wir bestimmen den Grad der Erweiterung $K(\alpha)|K(\alpha^2)$. Das Polynom $g = x^2 - \alpha^2 \in K(\alpha^2)[x]$ ist normiert und hat α als Nullstelle. Wäre g reduzibel, dann müssten wegen $\operatorname{grad}(g) = 2$ die beiden Nullstellen $\pm\alpha$ in $K(\alpha^2)$ liegen. Daraus würde $K(\alpha) \subseteq K(\alpha^2)$ folgen, was unserer Feststellung $K(\alpha^2) \subsetneq K(\alpha)$ widerspricht. Also ist g irreduzibel über $K(\alpha^2)$ und insgesamt das Minimalpolynom von α über $K(\alpha^2)$. Es folgt $[K(\alpha) : K(\alpha^2)] = [K(\alpha^2)(\alpha) : K(\alpha^2)] = \operatorname{grad}(g) = 2$.

Weil f_α das Minimalpolynom von α über K ist, gilt $[K(\alpha) : K] = \operatorname{grad}(f_\alpha)$. Auf Grund der Voraussetzung ist $[K(\alpha) : K]$ also ungerade. Aber andererseits ist $K(\alpha^2)$ wegen $\alpha^2 \in K(\alpha)$ ein Zwischenkörper von $K(\alpha)|K$. Die Gradformel liefert deshalb

$$[K(\alpha) : K] \quad = \quad [K(\alpha) : K(\alpha^2)] \cdot [K(\alpha^2) : K] \quad = \quad 2 \cdot [K(\alpha^2) : K].$$

Dies zeigt, dass $[K(\alpha) : K]$ gerade ist, im Widerspruch zur vorherigen Feststellung. Unsere zu Beginn getroffenen Annahmen waren also falsch; unter der Voraussetzung, dass $\operatorname{grad}(f_\alpha)$ ungerade ist, muss $K(\alpha) = K(\alpha^2)$ gelten.