Aufgabe H19T1A2 (12 Punkte)

Sei $f \in \mathbb{Q}[x]$ ein irreduzibles Polynom, das sowohl reelle als auch nicht reelle Nullstellen hat.
Man zeige, dass die Galoisgruppe von f über $\mathbb{Q}$ nicht abelsch ist.

Lösung:

Sei L der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$. Dann ist die Galoisgruppe von f über $\mathbb{Q}$ nach Definition durch $G = \mathrm{Gal}(f|\mathbb{Q}) = \mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$ gegeben. Nach Vorausetzung besitzt f (mindestens) eine Nullstelle $\alpha \in \mathbb{R}$ und eine weitere Nullstelle $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Weil f irreduzibel ist und α, β Nullstellen von f sind, gibt es auf Grund des Fortsetzungsatzes einen $\mathbb{Q}$-Homomorphismus $\tilde{\sigma} : \mathbb{Q}(\alpha) \to \mathbb{C}$ mit $\tilde{\sigma}(\alpha) = \beta$, und weil $L|\mathbb{Q}(\alpha)$ algebraisch und $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, kann dieser zu einem $\mathbb{Q}$-Homomorphismus $\sigma : L \to \mathbb{C}$ fortgesetzt werden. Weil die Erweiterung $L|\mathbb{Q}$ normal ist, ist σ zugleich ein Element der Gruppe $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(L) = G$.

Durch Einschränkung der komplexen Konjugation erhält man einen $\mathbb{Q}$-Homomorphismus $\tau : L \to \mathbb{C}$, also ebenfalls ein Element der Galoisgruppe G. Wegen $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gilt $\tau(\alpha) = \alpha$ und $\tau(\beta) = \bar{\beta} \neq \beta$. Es folgt nun einerseits

$$(\tau \circ \sigma)(\alpha) \quad = \quad \tau(\sigma(\alpha)) \quad = \quad \tau(\beta) \quad \neq \quad \beta$$

und andererseits

$$(\sigma \circ \tau)(\alpha) \quad = \quad \sigma(\tau(\alpha)) \quad = \quad \sigma(\alpha) \quad = \quad \beta.$$

Es gilt also $\tau \circ \sigma \neq \sigma \circ \tau$. Dies zeigt, dass G keine abelsche Gruppe ist.