Aufgabe H19T1A1 (12 Punkte)

(a) Finden Sie alle rationalen Nullstellen des Polynoms $x^3 - 2x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

(b) Zeigen Sie, dass das Polynom $x^5 + 18x^2 - 15 \in \mathbb{Q}[x]$ irreduzibel ist.

(c) Man zeige $1 + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

(d) Finden Sie i und k, so dass die Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 7 & 4 & i & 5 & 6 & k & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{gerade ist.}$$

Lösung:

zu (a) Weil $f = x^3 - 2x + 1$ ein ganzzahliges normiertes Polynom ist, sind alle rationalen Nullstellen ebenfalls ganzzahlig und Teiler des konstanten Terms 1. Die einzigen Teiler von 1 in $\mathbb{Z}$ sind ± 1. Es gilt $f(1) = 1 - 2 + 1 = 0$ und $f(-1) = (-1) + 2 + 1 = 2 \neq 0$. Also ist 1 die einzige rationale Nullstelle von f.

zu (b) Weil das Polynom in $\mathbb{Z}[x]$ liegt und die Voraussetzungen des Eisenstein-Kriteriums für die Primzahl $p = 3$ erfüllt (3 ist kein Teiler des Leitkoeffizienten 1, es gilt $3 \mid 18$, $3 \mid (-15)$ und $3^2 \nmid (-15)$), ist das Polynom in $\mathbb{Z}[x]$ irreduzibel. Auf Grund des Gauß'schen Lemmas ist es auch irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$.

zu (c) Aus $\sqrt{2}+\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ folgt $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{-1} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ (weil $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ nach Definition ein Teilkörper von $\mathbb{R}$ ist). Wegen

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{-1} \quad = \quad \frac{3-2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \quad = \quad \frac{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \quad = \quad \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \quad = \quad \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

ist auch $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ enthalten. Wegen $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ und insbesondere $\pm\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ folgt $\sqrt{2} = (-\frac{1}{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ und schließlich $1 + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

zu (d) Weil die angegebene Permutation eine surjektive Abbildung $\{1, ..., 9\} \to \{1, ..., 9\}$ ist, müssen auch die Elemente 3 und 8 in der Bildmenge enthalten sein. Deshalb muss $\{i, k\} = \{3, 8\}$ gelten. Es gibt also nur die beiden Möglichkeiten $(i, k) = (3, 8)$ und $(i, k) = (8, 3)$. Im ersten Fall ist die angegebene Permutation gleich

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 7 & 4 & 3 & 5 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad = \quad (3\ 7\ 6\ 5) \quad ,$$

aber jeder 4-Zykel hat Signum $(-1)^{4-1} = -1$, ist also ungerade. Im zweiten Fall gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 7 & 4 & 8 & 5 & 6 & 3 & 9 \end{pmatrix} \quad = \quad (3\ 7\ 6\ 5\ 8) \quad ,$$

und diese Permutation hat das Signum $(-1)^{5-1} = +1$, ist also gerade. Es muss also $i = 8$ und $k = 3$ gewählt werden.

Anmerkung:

Eigentlich wäre die zweite Rechnung nicht mehr nötig gewesen. Bezeichnen wir nämlich die Permutation zur Kombination $(i, k) = (3, 8)$ mit σ_1 und die Permutation zur Kombination $(i, k) = (8, 3)$ mit σ_2, dann gilt offenbar $\sigma_2 = (3\ 8) \circ \sigma_1$. Wegen $\operatorname{sgn}((3\ 8)) = -1$ war also von vornherein klar, das die beiden Permutation entgegengesetzte Vorzeichen haben müssen.