

**Aufgabe H18T3A5** (12 Punkte)

- (a) Sei  $\mathbb{Z}$  der Ring der ganzen Zahlen. Zeigen Sie, dass der Ring  $\mathbb{Z}[i]/(2)$  (wobei  $i^2 = -1$ ) genau vier Elemente hat.
- (b) Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit 1. Sei weiter  $t \in R$ . Zeigen Sie, dass jedes Element im Quotientenring  $R[x]/(tx - 1)$  kongruent zu einem Element der Form  $ax^n$  modulo  $tx - 1$  ist, wobei  $a \in R$  und  $n \geq 1$  eine natürliche Zahl ist.
- (c) Für einen kommutativen Ring  $R$  mit 1 wollen wir mit  $\text{Spec}(R)$  die Menge der Primideale von  $R$  bezeichnen. Sei  $\phi : R \rightarrow S$  ein Ringhomomorphismus in einen weiteren kommutativen Ring mit 1. Geben Sie einen Beweis dafür an, dass

$$\phi^{-1} : \text{Spec}(S) \longrightarrow \text{Spec}(R) \quad , \quad \mathfrak{p} \mapsto \phi^{-1}(\mathfrak{p})$$

eine wohldefinierte Abbildung ist.

*Hinweis/Kommentar:*

Für Teil (a) kommt man im Wesentlichen mit der Definition des Faktorrings  $\mathbb{Z}[i]/(2)$  aus. Man sieht leicht, dass zwei Elemente dieses Rings der Form  $a + bi + (2)$  und  $c + di + (2)$  mit  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  genau dann übereinstimmen, wenn  $a \equiv c \pmod{2}$  und  $b \equiv d \pmod{2}$  gilt. Mit dieser Beobachtung ist es nicht schwierig, ein vierelementiges Repräsentantensystem von  $\mathbb{Z}[i]/(2)$  zu finden.

Zu Teil (b) ist zunächst zu bemerken, dass einige Formulierungen unglücklich gewählt sind. Als *Quotientenring* bezeichnet man in der Algebra normalerweise eine Verallgemeinerung des Begriffs „Quotientenkörper“ auf Nicht-Integritätsbereiche. Eine Struktur der Form  $R/I$ , wobei  $R$  ein Ring und  $I$  ein Ideal von  $R$  bezeichnet, wird eher *Faktoring* genannt. Außerdem sollte man in  $R[x]/(tx - 1)$  nicht von „Kongruenz modulo  $tx - 1$ “ sprechen. Eine solche Kongruenz ist eine *Relation* auf dem Polynomring  $R[x]$ ; zwei Elemente  $f, g \in R[x]$  sind genau dann kongruent modulo  $tx - 1$ , wenn die Differenz  $f - g$  im Hauptideal  $(tx - 1)$  enthalten ist. Trifft dies auf  $f$  und  $g$  zu, dann sind die Nebenklassen  $f + (tx - 1)$  und  $g + (tx - 1)$  im Faktoring identisch (und nicht kongruent).

In der Aufgabe ist also zu zeigen, dass jede vorgegebene Element  $f + (tx - 1)$  in  $R[x]/(tx - 1)$  mit einem Element der Form  $ax^n + (tx - 1)$  übereinstimmt, wobei  $a \in R$  und  $n \in \mathbb{N}$  ist; oder gleichbedeutend, dass jedes  $f \in R[x]$  zu einem Element der Form  $ax^n \in R[x]$  modulo  $tx - 1$  kongruent ist. Entscheidend dafür ist nun die Beobachtung, dass bei einem Polynom der Form  $f = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  jede Nebenklasse  $a_k x^k + (tx - 1)$  mit einem Element der Form  $b_k x^n + (tx - 1)$  übereinstimmt, für geeignetes  $b_k \in R$ . Dies ergibt sich ziemlich unmittelbar aus der Gleichung  $1 + (tx - 1) = tx + (tx - 1)$ .

Die Einführung der Bezeichnung  $\text{Spec}(R)$  in Aufgabenteil (c) ist überflüssig und lässt die Aufgabe unnötig schwer erscheinen. (Das *Spektrum* eines Rings ist ein Begriff aus der Algebraischen Geometrie, der es ermöglicht, dem Ring einen topologischen Raum zuzuordnen. Man kann auf diese Weise rein algebraische Konzepte geometrisch, und damit anschaulich, interpretieren.) Der Begriff „wohldefiniert“ wird in der Mathematik nicht ganz einheitlich verwendet, persönlich würde ich ihn an einer solchen Stelle aber nicht platzieren. Meistens ist mit dieser Formulierung die Unabhängigkeit einer Definition von der Wahl von Nebenklassenvertretern gemeint. Beispielsweise ist eine Verknüpfung  $*$  auf einer Faktorgruppe  $G/N$  durch

$$(gN) * (hN) = (gh)N \quad \text{für } g, h \in G$$

wohldefiniert, weil sich die rechte Seite  $(gh)N$  der Gleichung nicht ändert, wenn man  $g$  und  $h$  durch andere Vertreter der Linksnebenklassen  $gN$  und  $hN$  ersetzt. Diese Art von Wohldefiniertheit ist aber in der Aufgabe nicht gemeint. Statt dessen soll nur gezeigt werden, dass durch  $\mathfrak{p} \mapsto \phi^{-1}(\mathfrak{p})$  tatsächlich eine Abbildung von  $\text{Spec}(S)$  nach  $\text{Spec}(R)$  gegeben ist. Man hätte die Aufgabe also einfach folgendermaßen formulieren können: „Sei  $\phi : R \rightarrow S$  ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie: Ist  $\mathfrak{p}$  ein Primideal des Rings  $S$ , dann ist die Urbildmenge  $\phi^{-1}(\mathfrak{p})$  ein Primideal in  $R$ .“ Dies ist eine Routineaufgabe, für die man lediglich die Definition der Primideale benötigt.