Aufgabe H18T3A4 (12 Punkte)

Zur Erinnerung: Eine komplexe Zahl heißt *algebraisch*, wenn sie Nullstelle eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten ist.

(a) Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und sei $c \in \mathbb{C}^n$ ein nicht verschwindender Vektor aus komplexen Zahlen. Zeigen Sie, dass eine komplexe Zahl z algebraisch ist, wenn eine rationale $n \times n$-Matrix A mit

$$z \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad = \quad A \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

existiert. *Hinweis:* Betrachten Sie das charakteristische Polynom von A.

(b) Seien x und y zwei algebraische Zahlen. Benutzen Sie die Aussage aus dem ersten Aufgabenteil, um zu zeigen dass $z = x + y$ ebenfalls algebraisch ist.
Hinweis: Betrachten Sie einen Vektor c, dessen Einträge von der Form $x^i y^j$ sind.

Hinweis/Kommentar:

In der Vorlesung wurde ein ziemlich einfacher Beweis dafür angegeben, dass in einer Körpererweiterung $L|K$ die über K algebraischen Elemente einen Teilkörper von L bilden, deren Menge also insbesondere abgeschlossen unter Addition ist. Die Aufgabenstellung zeigt, dass man dies auch deutlich komplizierter angehen kann. In Teil (a) benötigt man nicht mehr als die Aussage, dass die Eigenwerte einer Matrix die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind.

Wenn wir in Teil (b) das Kriterium aus Teil (a) anwenden wollen, müssen wir dem Element $z = x + y$ eine geeignete Matrix $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{Q})$ zuordnen, für ein noch zu bestimmendes $N \in \mathbb{N}$. Der gesuchte Vektor c wäre dann ein Element aus $\mathbb{C}^N$. Für die vorgeschlagenen Einträge $x^i y^j$ des Vektors c mit $i, j \in \mathbb{N}_0$ gilt nun jeweils $zx^i y^j = (x + y)x^i y^j = x^{i+1} y^j + x^i y^{j+1}$. Aus der Voraussetzung, dass x und y algebraische Zahlen sind, folgt die Gültigkeit von Gleichungen der Form $x^m = a_0 + a_1 x + ... + a_{m-1} x^{m-1}$ und $y^n = b_0 + b_1 y + ... + b_{n-1} y^{n-1}$, für geeignete $m, n \in \mathbb{N}$ und $a_i, b_j \in \mathbb{Q}$. Beschränken wir uns bei den $x^i y^j$ auf Monome mit $0 \leq i < m$ und $0 \leq j < n$, dann zeigt dies, dass $zx^i y^j$ wiederum als $\mathbb{Q}$-Linearkombination dieser Monome dargestellt werden kann.

Mit Hilfe dieser Darstellungen findet man nun eine passende Matrix A. Was die Umsetzung kompliziert macht, ist die Tatsache, dass die Elemente $x^i y^j$ von *zwei* Parametern abhängen (i und j), während der Vektor c im $\mathbb{C}^N$ lebt, also nur von einem Parameter abhängt. Es gibt insgesamt mn Paare (i, j) mit $0 \leq i < m$ und $0 \leq j < n$, also muss $N = mn$ sein. Dafür, in welcher Reihenfolge man die Monome $x^i y^j$ in den Vektor c schreibt, gibt es nun mehrere Möglichkeiten. Man kann beispielsweise zunächst alle Monome mit $i = 0$ in die Positionen $1, ..., n$ schreiben, dann die Monome mit $i = 1$ in die Positionen $n + 1, ..., 2n$ usw. Dies läuft dann darauf hinaus, dass man $c_{in+j+1} = x^i y^j$ für $0 \leq i \leq m - 1$ und $0 \leq j \leq n - 1$ setzt.