**Aufgabe H18T3A4** (12 Punkte)

Zur Erinnerung: Eine komplexe Zahl heißt *algebraisch*, wenn sie Nullstelle eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten ist.

(a) Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und sei $c \in \mathbb{C}^n$ ein nicht verschwindender Vektor aus komplexen Zahlen. Zeigen Sie, dass eine komplexe Zahl $z$ algebraisch ist, wenn eine rationale $n \times n$-Matrix $A$ mit

$$z \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

existiert. *Hinweis:* Betrachten Sie das charakteristische Polynom von $A$.

(b) Seien $x$ und $y$ zwei algebraische Zahlen. Benutzen Sie die Aussage aus dem ersten Aufgabenteil, um zu zeigen dass $z = x + y$ ebenfalls algebraisch ist.
*Hinweis:* Betrachten Sie einen Vektor $c$, dessen Einträge von der Form $x^i y^j$ sind.

*Lösung:*

zu (a) Sei $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ eine Matrix mit $zc = Ac$. Dann ist $c \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor von $A$ zum Eigenwert $z$. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass die Eigenwerte einer quadratischen Matrix genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind. Bezeichnet also $\chi_A \in \mathbb{Q}[X]$ das charakteristische Polynom von $A$, dann gilt $\chi_A(z) = 0$. Weil es sich bei $\chi_A$ um ein über $\mathbb{Q}$ definiertes Polynom $\neq 0$ handelt, zeigt diese Gleichung, dass $z$ (über $\mathbb{Q}$) algebraisch ist.

zu (b) Weil $x$ und $y$ algebraische Zahlen sind, gibt es Polynome $0 \neq f, g \in \mathbb{Q}[X]$ mit $f(x) = g(y) = 0$. Diese Polynome sind nicht konstant (denn ein konstantes Polynom $\neq 0$ besitzt keine Nullstellen). Seien $m, n \in \mathbb{N}$ gegeben durch $m = \text{grad}(f)$ und $n = \text{grad}(g)$ und $N = mn$. Schreiben wir $f = a_m X^m + ... + a_1 X + a_0$ und $g = b_n X^n + ... + b_1 X + b_0$, dann liefert das Umstellen von $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ nach $x^m$ bzw. $y^n$ die Gleichungen

$$x^m = -\sum_{k=0}^{m-1} \frac{a_k}{a_m} x^k \qquad \text{und} \qquad y^n = -\sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{b_\ell}{b_n} y^\ell.$$

Sei nun der Vektor $c \in \mathbb{C}^N$ definiert durch $c_{in+j+1} = x^i y^j$ für $0 \leq i \leq m-1$ und $0 \leq j \leq n-1$. Es gilt dann jeweils

$$zc_{in+j+1} = (x+y)x^i y^j = x^{i+1}y^j + x^i y^{j+1}.$$

Für $i < m-1$ und $j < n-1$ ist also $zc_{in+j+1} = c_{(i+1)+j+1} + c_{in+j+2}$. Im Fall $i = m-1$, $j < n-1$ ist der Ausdruck auf der rechten Seite gleich

$$zc_{(m-1)n+j+1} = x^m y^j + x^{m-1}y^{j+1} = -\sum_{k-0}^{m-1} \frac{a_k}{a_m} x^k y^j + x^{m-1} y^{j+1} = -\sum_{k=0}^{m-1} \frac{a_k}{a_m} c_{kn+j+1} + c_{(m-1)n+j+1}.$$

Im Fall $i < m-1$, $j = n-1$ erhalten wir entsprechend

$$zc_{in+n} = x^{i+1}y^{n-1} + x^i y^n = x^{i+1}y^{n-1} - \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{b_\ell}{b_n} x^i y^\ell = c_{(i+1)n+n} - \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{b_\ell}{b_n} c_{in+\ell+1} \quad ,$$

und im Fall $i = m-1$, $j = n-1$ schließlich

$$\begin{aligned} zc_{mn} \quad = \quad zc_{(m-1)n+n} \quad = \quad x^m y^{n-1} + x^{m-1} y^n \quad &= \quad -\sum_{k=0}^{m-1} \frac{a_k}{a_m} x^k y^{n-1} - \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{b_\ell}{b_n} x^{m-1} y^\ell \\ &= \quad -\sum_{k=0}^{m-1} \frac{a_k}{a_m} c_{kn+n} - \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{b_\ell}{b_n} c_{(m-1)n+\ell+1}. \end{aligned}$$

Insgesamt ist damit gezeigt, dass für alle $r \in \{1, ..., N\}$ jeweils Koeffizienten $a_{rs} \in \mathbb{Q}$ mit $zc_r = \sum_{r=1}^{N} a_{rs} c_s$ existieren. Bezeichnen wir die Matrix aus $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ mit den Einträgen $a_{rs}$ mit $A$, dann gilt also $Ac = zc$. Nach Teil (b) ist $z = x + y$ damit eine algebraische Zahl.