Aufgabe H13T3A3 (12 Punkte)

Mit $\mathbb{Q}$ bezeichnen wir den Körper der rationalen Zahlen. Sei f ein irreduzibles Polynom fünften Grades über den rationalen Zahlen, desssen galoissche Gruppe isomorph zur symmetrischen Gruppe S_5 ist. Mit L bezeichnen wir einen Zerfällungskörper von f über den rationalen Zahlen.

(a) Welchen Grad hat L über $\mathbb{Q}$? (Geben Sie eine kurze Begründung an.)

(b) Seien $x_1, ..., x_5$ die Nullstellen von f in L. Kann der Fall $x_i = x_j$ mit $i \neq j$ auftreten? (Geben Sie eine kurze Begründung an.)

(c) Für jedes $i = 0, ..., 5$ betrachten wir die Zwischenerweiterung $K_i = \mathbb{Q}(x_1, ..., x_i)$ (d.h. insbesondere $K_0 = \mathbb{Q}$) von L über $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie den Grad von K_{i+1} über K_i für $i = 0, ..., 4$.

(d) Geben Sie Begründungen dafür an, warum f über $\mathbb{Q}$ nicht, dafür aber über K_1 auflösbar ist.

Lösung:

In Teil (a) und Teil (b) wird lediglich Hintergrundwissen abgefragt (zur Ordnung von Galoisgruppen bzw. zur Separabilität). In Teil (c) schätzt man die Grade $[K_{i+1} : K_i]$ zunächst nach oben ab. Dass $[K_1 : K_0] = [\mathbb{Q}(x_1) : \mathbb{Q}] = 5$ sein muss, ist leicht zu sehen. Der Grad $[K_2 : K_1]$ kann durch 4 abgeschätzt werden, denn x_2 ist Nullstelle eines Polynoms aus $K_1[x]$ vom Grad 4. (Wie erhält man dieses Polynom mit Hilfe von f?) Danach sollte das Muster klar sein. Um nicht nur eine obere Abschätzung, sondern den genauen Wert für jeden Grad zu erhalten, verwendet man das Ergebnis aus Teil (a) und die Gradformel.

Für Teil (d) benötigt man den Satz, der besagt, dass ein Polynom $f \in K[x]$ über einem Körper K mit irreduziblen separablen Faktoren genau dann über (durch Radikale) K auflösbar ist, wenn die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(f|K)$ auflösbar ist. (Wie die Auflösbarkeit eines Polynoms über einem Körper K definiert ist, spielt für die Aufgabe keine Rolle.) Außerdem verwendet man, dass Polynome vom Grad ≤ 4 stets auflösbar sind.