Aufgabe H13T3A3 (12 Punkte)

Mit $\mathbb{Q}$ bezeichnen wir den Körper der rationalen Zahlen. Sei f ein irreduzibles Polynom fünften Grades über den rationalen Zahlen, desssen galoissche Gruppe isomorph zur symmetrischen Gruppe S_5 ist. Mit L bezeichnen wir einen Zerfällungskörper von f über den rationalen Zahlen.

(a) Welchen Grad hat L über $\mathbb{Q}$? (Geben Sie eine kurze Begründung an.)

(b) Seien $x_1, ..., x_5$ die Nullstellen von f in L. Kann der Fall $x_i = x_j$ mit $i \neq j$ auftreten? (Geben Sie eine kurze Begründung an.)

(c) Für jedes $i = 0, ..., 5$ betrachten wir die Zwischenerweiterung $K_i = \mathbb{Q}(x_1, ..., x_i)$ (d.h. insbesondere $K_0 = \mathbb{Q}$) von L über $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie den Grad von K_{i+1} über K_i für $i = 0, ..., 4$.

(d) Geben Sie Begründungen dafür an, warum f über $\mathbb{Q}$ nicht, dafür aber über K_1 auflösbar ist.

Lösung:

zu (a) Allgemein gilt: Ist $L|K$ eine endliche Galois-Erweiterung und $G = \mathrm{Gal}(L|K)$ die zugehörige Galoisgruppe, dann gilt $|G| = [L : K]$. Da L hier Zerfällungskörper eines Polynoms über $\mathbb{Q}$ ist, handelt es sich bei $L|\mathbb{Q}$ um eine endliche normale Erweiterung. Insbesondere ist $L|\mathbb{Q}$ algebraisch, wegen $\mathrm{char}(\mathbb{Q}) = 0$ damit auch separabel, insgesamt also eine endliche Galois-Erweiterung. Nach Definition der Galoisgruppe eines Polynoms gilt $\mathrm{Gal}(f|\mathbb{Q}) = \mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$, und laut Angabe ist $\mathrm{Gal}(f|\mathbb{Q}) \cong S_5$. Damit gilt insgesamt $[L : \mathbb{Q}] = |\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})| = |\mathrm{Gal}(f|\mathbb{Q})| = |S_5| = 120$.

zu (b) Nein. Laut Angabe ist $f \in \mathbb{Q}[x]$ ein über $\mathbb{Q}$ irreduzibles Polynom. Wegen $\mathrm{char}(\mathbb{Q}) = 0$ ist jedes solche Polynom separabel, besitzt also in jedem Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}$ nur einfache Nullstellen. Wäre $x_i = x_j$ für $i \neq j$, dann würde es sich bei x_i um eine mehrfache Nullstelle von f in L handeln.

zu (c) Zunächst zeigen wir $[K_{i+1} : K_i] \leq 5-i$ für $0 \leq i \leq 4$. Nach Definition gilt jeweils $K_{i+1} = K_i(x_{i+1})$. Sei $f_i = \mu_{K_i, x_{i+1}}$ für $0 \leq i \leq 4$. Das Polynom f wird in $K_i[x]$ jeweils vom Polynom $g_i = (x-x_1)\cdot ... \cdot(x-x_i)$ geteilt, denn die Nullstellen $x_1, ..., x_i$ sind nach Definition in K_i enthalten. (Für $i = 0$ besteht g_i aus null Faktoren, es ist also $g_0 = 1$.) Es gibt also jeweils ein $h_i \in K_i[x]$ mit $f = g_i h_i$, und wegen $\mathrm{grad}(g_i) = i$ und $\mathrm{grad}(f) = 5$ ist $\mathrm{grad}(h_i) = 5 - i$. Offenbar ist h_i durch $h_i = (x - x_{i+1}) \cdot ... \cdot (x - x_5)$ gegeben. Also ist h_i ein Polynom in $K_i[x]$ mit x_{i+1} als Nullstelle. Es folgt $f_i \mid h_i$ und damit

$$[K_{i+1} : K_i] \quad = \quad [K_i(x_{i+1}) : K_i] \quad = \quad \mathrm{grad}(f_i) \quad \leq \quad \mathrm{grad}(h_i) \quad \leq \quad 5 - i.$$

Wegen $K_0 = \mathbb{Q}$ und $K_5 = L$ gilt andererseits auf Grund der Gradformel

$$120 \quad = \quad [L : \mathbb{Q}] \quad = \quad [K_5 : K_0] \quad = \quad \prod_{i=0}^{4} [K_{i+1} : K_i].$$

Wegen $120 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ ist dies nur möglich, wenn $[K_{i+1} : K_i] = 5 - i$ für $0 \leq i \leq 4$ erfüllt ist.

zu (d) Sei K ein Körper und $f \in K[x]$ ein nicht-konstantes Polynom mit separablen irreduziblen Faktoren. Laut Vorlesung ist f genau dann über K auflösbar, wenn die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(f|K)$ auflösbar ist. Für das hier gegebene Polynom $f \in \mathbb{Q}[x]$ gilt laut Angabe $\mathrm{Gal}(f|\mathbb{Q}) \cong S_5$, und die symmetrische Gruppe S_5 ist laut Vorlesung nicht auflösbar. Also ist auch f über $\mathbb{Q}$ nicht auflösbar.

Über K_1 besitzt das Polynom die Zerlegung $f = (x - x_1)h_1$, wobei das Polynom $h_1 \in K_1[x]$ vom Grad 4 wie oben definiert ist. Der Zerfällungskörper von f über K_1 ist gleich dem Zerfällungskörper von h_1 über K_1. Weil nämlich $x_1, ..., x_5$ die Nullstellen von f in L sind, und f über L in Linearfaktoren zerfällt, ist der Zerfällungskörper von f über K_1 gegeben durch $K_1(x_1, ..., x_5) = K_1(x_1)(x_2, ..., x_5) = K_1(x_2, ..., x_5)$, wobei wir im zweiten Schritt $x_1 \in K_1$ verwendet haben. Weil $x_2, ..., x_5$ die Nullstellen von h_1 in L sind, ist $K_1(x_2, ..., x_5)$ auch der Zerfällungskörper von h_1 über K_1. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass Galoisgruppen von Polynomen vom Grad ≤ 4 stets auflösbar sind. Also ist auch $\mathrm{Gal}(f|K_1)$ auflösbar, und damit ist das Polynom f über K_1 auflösbar.