Aufgabe H18T3A2 (12 Punkte)

(a) Geben Sie ein normiertes Polynom mit rationalen Koeffizienten an, welches $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ als Nullstelle hat.

(b) Mit S_n wollen wir die symmetrischen, mit A_n die alternierenden Gruppen bezeichnen. Begründen Sie, warum $A_3 \times A_3$ die einzige 3-Sylowgruppe von $S_3 \times S_3$ ist.

(c) Sei $f = x^2 + px + q$ ein Polynom mit rationalen Koeffizienten. Was können Sie über die Galoissche Gruppe von f sagen, wenn die Diskriminante $\Delta = p^2 - 4q$ ein Quadrat in den rationalen Zahlen ist?

Hinweis/Kommentar:

Der Rechenweg, mit dem man in Teil (a) ein solches Polynom findet, sollte aus den Übungen bekannt sein. Starten Sie mit der Gleichung $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{7}$, und formen Sie die Gleichung so um, dass keine Quadratwurzeln mehr auftauchen. (Denken Sie daran, dass Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist. Zwischen den Rechenschritten darf also im Allgemeinen kein Äquivalenzpfeil $\Leftrightarrow$, sondern nur ein Implikationspfeil $\Rightarrow$ gesetzt werden.)

Für Teil (b) benötigt man nur die Sylowsätze, und in Teil (c) nicht mehr als die Definition der Galoisgruppe eines Polynoms. (Allgemein gilt: Ist $f \in \mathbb{Q}[x]$ ein Polynom mit n verschiedenen Nullstellen $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{C}$, so ist das Bild von $\mathrm{Gal}(f|\mathbb{Q})$ in S_n genau dann in A_n enthalten, wenn die Diskriminante von f ein Quadrat in $\mathbb{Q}$ ist. Diese Aussage könnte man hier auf $n = 2$ anwenden, man kommt aber genauso gut ohne diesen Satz aus.)