Aufgabe H18T3A2 (12 Punkte)

(a) Geben Sie ein normiertes Polynom mit rationalen Koeffizienten an, welches $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ als Nullstelle hat.

(b) Mit S_n wollen wir die symmetrischen, mit A_n die alternierenden Gruppen bezeichnen. Begründen Sie, warum $A_3 \times A_3$ die einzige 3-Sylowgruppe von $S_3 \times S_3$ ist.

(c) Sei $f = x^2 + px + q$ ein Polynom mit rationalen Koeffizienten. Was können Sie über die Galoissche Gruppe von f sagen, wenn die Diskriminante $\Delta = p^2 - 4q$ ein Quadrat in den rationalen Zahlen ist?

Lösung:

zu (a) Sei $\alpha = \sqrt{2}+\sqrt{7}$. Dann gilt

$$\alpha - \sqrt{2} = \sqrt{7} \quad \Rightarrow \quad (\alpha-\sqrt{2})^2 = 7 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 - 2\sqrt{2}\alpha + 2 = 7 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 - 2\sqrt{2}\alpha = 5$$

$$\Rightarrow \quad \alpha^2 - 5 = 2\sqrt{2}\alpha \quad \Rightarrow \quad (\alpha^2-5)^2 = 8\alpha^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha^4 - 10\alpha^2 + 25 = 8\alpha^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha^4 - 18\alpha^2 + 25 = 0.$$

Also ist $f = x^4 - 18x^2 + 25$ ein normiertes Polynom in $\mathbb{Q}[x]$ mit $f(\alpha) = 0$.

zu (b) Zunächst einmal stellen wir fest, dass $A_3 \times A_3$ tatsächlich eine 3-Sylowgruppe von $S_3 \times S_3$ ist. Weil nämlich A_3 eine Untergruppe von S_3 ist, ist auch $A_3 \times A_3$ eine Untergruppe von $S_3 \times S_3$. Außerdem gilt $|S_3 \times S_3| = |S_3|^2 = 6^2 = 2^2 \cdot 3^2$. Dies zeigt, dass die 3-Sylowgruppen von $S_3 \times S_3$ genau die Untergruppen der Ordnung $3^2 = 9$ sind. Wegen $|A_3 \times A_3| = |A_3|^2 = 3^2 = 9$ ist $A_3 \times A_3$ also tatsächlich eine 3-Sylowgruppe von $S_3 \times S_3$.

Laut Vorlesung gilt allgemein: Ist G eine endliche Gruppe, p eine Primzahl und P eine p-Sylowgruppe von G, so ist P die einzige p-Sylowgruppe von G genau dann, wenn P Normalteiler von G ist. Somit genügt es zu zeigen, dass $A_3 \times A_3$ ein Normalteiler von $S_3 \times S_3$ ist. Seien dazu $(\tau_1, \tau_2) \in A_3 \times A_3$ und $(\sigma_1, \sigma_2) \in S_3 \times S_3$ vorgegeben. Zu zeigen ist $(\sigma_1,\sigma_2)(\tau_1,\tau_2)(\sigma_1,\sigma_2)^{-1} \in A_3 \times A_3$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass A_3 ein Normalteiler von S_3 ist. Deshalb gilt $\sigma_i\tau_i\sigma_i^{-1} \in A_3$ für $i = 1, 2$. Es folgt

$$(\sigma_1,\sigma_2)(\tau_1,\tau_2)(\sigma_1,\sigma_2)^{-1} \quad = \quad (\sigma_1,\sigma_2)(\tau_1,\tau_2)(\sigma_1^{-1},\sigma_2^{-1}) \quad = \quad (\sigma_1\tau_1\sigma_1^{-1}, \sigma_2\tau_2\sigma_2^{-1}) \quad \in \quad A_3 \times A_3.$$

zu (c) Nach Definition ist die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(f|\mathbb{Q})$ die Galoisgruppe von $L|\mathbb{Q}$, wobei $L \subseteq \mathbb{C}$ den Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$ bezeichnet. Dieser wiederum ist gegeben durch $L = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2)$, wobei α_1, α_2 die komplexen Nullstellen von f sind. Laut „p-q-Formel" (oder „Mitternachtsformel") sind diese Nullstellen gegeben durch $-\frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} = -\frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2-4q}$. Ist Δ ein Quadrat in $\mathbb{Q}$, dann ist $\sqrt{p^2-4q}$ in $\mathbb{Q}$ enthalten, und somit gilt auch $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q}$. Es folgt $L = \mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_2) = \mathbb{Q}$ und $\mathrm{Gal}(f|\mathbb{Q}) = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}|\mathbb{Q}) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{Q}}\}$. Wenn Δ in $\mathbb{Q}$ ein Quadrat ist, ist die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(f|\mathbb{Q})$ des Polynoms also trivial.