**Aufgabe H18T3A1** (12 Punkte)

(a) Geben Sie die Definition einer *auflösbaren Gruppe* an.

(b) Sei $d \geq 1$ eine natürliche Zahl. Geben Sie eine Definition für das *$d$-te Kreisteilungspolynom* $\Phi_d$ über den rationalen Zahlen an.

(c) Geben Sie eine Formulierung des *Satzes vom primitiven Element* an.

*Lösung:*

zu (a) Eine Gruppe $G$ wird *auflösbar* genannt, wenn ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $G^{(n)} = \{e_G\}$ existiert. Dabei bezeichnet $G^{(n)}$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die *$n$-te Kommutatorgruppe* von $G$. Dabei sind die höheren Kommutatorgruppen rekursiv definiert durch $G^{(0)} = G$ und $G^{(n+1)} = (G^{(n)})'$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Für jede Gruppe $G$ ist die *Kommutatorgruppe* $G'$ die von der Menge der sog. *Kommutatoren* $[g,h] = ghg^{-1}h^{-1}$ erzeugte Untergruppe, wobei $g$ und $h$ alle Elemente der Gruppe $G$ durchlaufen.

zu (b) Für $d = 1$ ist $\Phi_d = x - 1 \in \mathbb{Z}[x]$. Für alle $d \in \mathbb{N}$ mit $d \geq 2$ ist $\Phi_d$ definiert durch

$$\Phi_d \quad = \quad \prod_{\zeta \in \mu_d^\times} (x - \zeta) \quad ,$$

wobei $\mu_d^\times$ die Menge der primitiven $d$-ten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$ bezeichnet. Dies sind jeweils die Elemente der Ordnung $d$ in $\mathbb{C}^\times$.

zu (c) Der Satz vom primitiven Element besagt, dass für jede endliche separable Körpererweiterung $L|K$ ein $\alpha \in L$ mit $L = K(\alpha)$ existiert. (Ein solches Element $\alpha$ wird *primitives Element* der Körpererweiterung genannt.)