

Aufgabe H18T2A3 (12 Punkte)

Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe. Die *Torsion* $T(G)$ von G ist die Menge aller Elemente endlicher Ordnung von G . Die Gruppe heißt *torsionsfrei*, falls $T(G) = \{0_G\}$, wobei 0_G das neutrale Element von G bezeichnet.

(a) Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie:

(i) $T(G)$ ist eine Untergruppe von G .

(ii) $G/T(G)$ ist torsionsfrei.

(b) Geben Sie eine unendliche abelsche Gruppe mit nichttrivialer Torsion an.

Anmerkung/Kommentar:

Das Nachrechnen der Untergruppen-Eigenschaften von $T(G)$ ist reine Routine; denken Sie aber bei anderen Aufgaben daran, dass die Rechenregel $(gh)^m = g^m h^m$, in additiver Form $m(g+h) = mg + mh$, nur für abelsche Gruppen gültig ist. Aufgabenteil (a)(ii) bietet eine gute Gelegenheit, den Umgang mit Faktorgruppen zu trainieren, sollte aber sonst keine Probleme bereiten. Um in Teil (b) eine unendliche Anzahl passender Beispiel zu finden, genügt es, sich an den Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen zu erinnern.