Aufgabe H18T2A3 (12 Punkte)

Sei $(G,+)$ eine abelsche Gruppe. Die *Torsion* $T(G)$ von G ist die Menge aller Elemente endlicher Ordnung von G. Die Gruppe heißt *torsionsfrei*, falls $T(G) = \{0_G\}$, wobei 0_G das neutrale Element von G bezeichnet.

(a) Sei $(G,+)$ eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie:

(i) $T(G)$ ist eine Untergruppe von G.

(ii) $G/T(G)$ ist torsionsfrei.

(b) Geben Sie eine unendliche abelsche Gruppe mit nichttrivialer Torsion an.

Lösung:

zu (a)(i) Das Neutralelement 0_G von G hat Ordnung 1 und ist somit in $T(G)$ enthalten. Seien nun $a, b \in T(G)$ vorgegeben. Dann sind $m = \mathrm{ord}(a)$ und $n = \mathrm{ord}(b)$ endlich. Weil G abelsch ist, gilt

$$(mn)(a+b) \quad = \quad (mn)a + mn(b) \quad = \quad n(ma) + m(nb) \quad = \quad n \cdot 0_G + m \cdot 0_G \quad = \quad 0_G.$$

Also ist $\mathrm{ord}(a+b)$ ein Teiler von mn, insbesondere endlich, und damit $a + b \in T(G)$. Ebenso folgt aus $m(-a) = -(ma) = -0_G = 0_G$, dass $-a$ von endlicher Ordnung ist und somit in $T(G)$ liegt. Insgesamt ist damit nachgewiesen, dass es sich bei $T(G)$ um eine Untergruppe von G handelt.

zu (a)(ii) Wir zeigen, dass $T(G/T(G)) = \{0_{G/T(G)}\}$ gilt. Die Inklusion "'$\supseteq$" ist offensichtlich, weil $T(G/T(G))$ nach Teil (i) eine Untergruppe von $G/T(G)$ ist. Für den Nachweis von „$\subseteq$" sei $\bar{a} = a + T(G)$ in $T(G/T(G))$ vorgegeben, mit $a \in G$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n\bar{a} = 0_{G/T(G)}$. Wegen $na + T(G) = n(a + T(G))$ und $0_{G/T(G)} = 0 + T(G)$ folgt $na + T(G) = 0 + T(G)$ und somit $na \in T(G)$. Es existiert somit ein $m \in \mathbb{N}$ mit $(mn)a = m(na) = 0_G$. Aber dies bedeutet, dass bereits a in $T(G)$ liegt. Somit $\bar{a} = a + T(G) = 0 + T(G) = 0_{G/T(G)}$. Damit ist $T(G/T(G)) = \{0_{G/T(G)}\}$ nachgewiesen.

zu (b) Sei $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, mit $(\bar{0}, 0)$ als Neutralelement. Wegen $(\bar{1}, 0) \neq 0_G$ und $2(\bar{1}, 0) = (\bar{2}, 0) = (\bar{0}, 0) = 0_G$ ist $(\bar{1}, 0)$ ein Element in $T(G)$ ungleich dem Neutralelement. Also besitzt die Gruppe G nichttriviale Torsion.