Aufgabe H18T2A2 (12 Punkte)

Sei $L|K$ eine Körpererweiterung. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, sei A eine $m \times n$-Matrix mit Koeffizienten in K und sei $b \in K^m$. Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ genau dann eine Lösung $x \in K^n$ hat, wenn es eine Lösung $x \in L^n$ hat.

Hinweis/Kommentar:

Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass die Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ an der Matrix A und der erweiterten Koeffizientenmatrix $\tilde{A} = (A, b)$ des Systems abgelesen werden kann, genauer gesagt an den Rängen dieser Matrizen. Ob sich der Rang einer Matrix A über K beim Übergang zu einem Erweiterungskörper ändern kann, wird in der Linearen Algebra aber normalerweise nicht diskutiert. Vor vornherein ausschließen kann man es nicht, da zum Beispiel die Eigenwerte einer quadratischen Matrix durchaus davon abhängen können, über welchem Grundkörper man die Matrix betrachtet.

Der Rang einer Matrix ist aber vom betrachteten Grundkörper tatsächlich unabhängig. Zumindest die Aussage, dass eine $n \times n$-Matrix A den vollen Rang n hat, hängt offensichtlich nicht vom Grundkörper ab, denn die Gleichung $\det(A) = 0$ ist unabhängig davon, ob man sie in K oder einem Erweiterungskörper L von K betrachtet. Versuchen Sie, ausgehend von dieser Feststellung, die Unabhängigkeit im allgemeinen Fall zu beweisen. Verwenden Sie dabei, dass der Rang einer Matrix als Zeilen- und als Spaltenrang interpretiert werden kann. (Dies ist die Aussage des *Rangsatzes* aus der Linearen Algebra.)