Aufgabe H18T2A2 (12 Punkte)

Sei $L|K$ eine Körpererweiterung. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, sei A eine $m \times n$-Matrix mit Koeffizienten in K und sei $b \in K^m$. Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ genau dann eine Lösung $x \in K^n$ hat, wenn es eine Lösung $x \in L^n$ hat.

Lösung:

Sei $\tilde{A} \in \mathcal{M}(m \times (n+1), K)$ die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems $Ax = b$. Laut Vorlesung ist das LGS genau dann in K^n lösbar, wenn der Rang $\mathrm{rg}(\tilde{A})$ von $\tilde{A}$, aufgefasst als Matrix über K, mit dem Rang $\mathrm{rg}(A)$ von A übereinstimmt, wobei A ebenfalls über K betrachtet wird. Entsprechend existiert eine Lösung in L^n genau dann, wenn $\mathrm{rg}(\tilde{A}) = \mathrm{rg}(A)$ gilt, wobei $\tilde{A}$ und A diesmal über dem Körper L betrachtet werden. Es reicht deshalb zu zeigen, dass allgemein für $r, s \in \mathbb{N}$ der Rang einer Matrix $A \in \mathcal{M}(r \times s, K)$ unabhängig davon ist, ob man A über dem Körper K oder über dem Körper L betrachtet.

Sei also A eine solche Matrix, $u = \mathrm{rg}_K(A)$ der Rang von A betrachtet über K und $v = \mathrm{rg}_L(A)$ der Rang von A betrachtet über L; zu zeigen ist $u = v$. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass der Rang von A, aufgefasst als Matrix über K, mit dem Zeilenrang übereinstimmt, also mit der Dimension der K-Vektorraums, der von den Zeilen der Matrix A übereinstimmt. Wir können deshalb in A eine $u \times s$-Teilmatrix A' vom Rang $\mathrm{rg}_K(A') = u$ wählen. Weil der Rang einer Matrix auch mit dem Spaltenrang übereinstimmt, können wir von dort zu einer $u \times u$-Teilmatrix A'' vom Rang $\mathrm{rg}_K(A'') = u$ übergehen. Weil A'' nun eine Matrix mit vollem Rang u ist, gilt $\det(A'') \neq 0$.

Aus $\det(A'') \neq 0$ folgt, dass A'' auch aufgefasst als Matrix über L den vollen Rang u besitzt, also $\mathrm{rg}_L(A'') = u$ gilt. Nun sind nach Definition die Spalten von A' alles K-Linearkombinationen der Spalten von A'', also erst recht L-Linearkombinationen. Daraus folgt $\mathrm{rg}_L(A') = \mathrm{rg}_L(A'') = u$. Ebenso sind die Zeilen von A jeweils L-Linearkombinationen der Zeilen von A'. Daraus folgt schließlich $v = \mathrm{rg}_L(A) = \mathrm{rg}_L(A') = u$.