Aufgabe H18T2A1 (12 Punkte)

(a) Man zeige, dass die beiden Zahlen $12n + 1$ und $30n + 2$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ teilerfremd sind.

(b) Sei K ein Körper. Man zeige, dass der Polynomring $K[x]$ unendlich viele irreduzible Polynome enthält.

Hinweis: Man verwende z.B. die Idee in Euklids Beweis der Unendlichkeit der Primzahlmenge.

Hinweis/Kommentar:

In Teil (a) betrachten Sie einen hypothetischen gemeinsamen Teiler $d \in \mathbb{N}$ der beiden Zahlen $12n+1$ und $30n + 2$. Verwenden Sie, dass d dann auch ein gemeinsamer Teiler von $a(12n + 1) + b(30n + 2)$ ist, wobei $a, b \in \mathbb{Z}$ beliebig gewählt werden können. Für Teil (b) erinnern wir an die wesentliche Idee in Euklids Beweis: Angenommen, es gibt nur endlich viele Primzahlen $p_1, ..., p_r$. Betrachten Sie die Primteiler von $p_1 \cdot ... \cdot p_r + 1$. Die Idee lässt sich problemlos auf Polynome in $K[x]$ übertragen.