Aufgabe H18T2A1 (12 Punkte)

(a) Man zeige, dass die beiden Zahlen $12n + 1$ und $30n + 2$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ teilerfremd sind.

(b) Sei K ein Körper. Man zeige, dass der Polynomring $K[x]$ unendlich viele irreduzible Polynome enthält.

Hinweis: Man verwende z.B. die Idee in Euklids Beweis der Unendlichkeit der Primzahlmenge.

Lösung:

zu (a) Sei $n \in \mathbb{Z}$ und nehmen wir an, $d \in \mathbb{N}$ ist ein gemeinsamer Teiler von $12n + 1$ und $30n + 2$. Dann ist d auch ein Teiler von $5 \cdot (12n+1) + (-2)(30n+2) = 1$. Also muss $d = 1$ sein, und folglich sind $12n+1$ und $30n + 2$ teilerfremd.

zu (b) Zumindest ist x ein irreduzibles Polynom in $K[x]$. Nehmen wir an, es gibt in $K[x]$ nur endlich viele irreduzible Polynome $f_1, ..., f_r$ gibt, mit $r \in \mathbb{N}$. Sei $g \in K[x]$ ein irreduzibler Faktor des Polynoms $h = f_1 \cdot ... \cdot f_r + 1$. Dann muss $g = f_i$ für ein $i \in \{1, ..., r\}$ gelten, da laut Annahme außer $f_1, ..., f_r$ keine irreduziblen Polynome existieren. Aber dann wäre g sowohl ein Teiler von $f_1 \cdot ... \cdot f_r + 1$ als auch von $f_1 \cdot ... \cdot f_r$, und damit auch ein Teiler der Differenz 1 dieser beiden Polynome. Aber aus $g|1$ folgt, dass g in $K[x]$ eine Einheit ist, im Widerspruch zur Irreduzibilität von g.