Aufgabe H18T1A5 (12 Punkte)

Sei $K = \{0, 1, a, b\}$ ein Körper mit vier Elementen (0 sei das Nullelement, 1 das Einselement).

(a) Stellen Sie die Additions- und die Multiplikationstabelle von K auf.

(b) Sei $f = x^4 + x + 1 \in K[x]$. Zeigen Sie, dass f reduzibel ist.

(c) Bestimmen Sie den Grad des Zerfällungskörpers von f über K.

Hinweise/Kommentar:

In Teil (a) genügt es, die Elemente $a + 1$ und ab durch ein Ausschlussprinzip zu ermitteln. Daraus ergeben sich fast unmittelbar alle Einträge der Verknüpfungstabellen, wenn man noch berücksichtigt, dass $\mathrm{char}(K) = 2$ gelten muss.

Für die Lösung von Teil (b) gibt es (mindestens) zwei Möglichkeiten: Die erste besteht darin, dass man in einem festgewählten algebraischen Abschluss $\tilde{K}$ von K eine Nullstelle α des Polynoms f betrachtet und $K \subseteq P(\alpha)$ nachweist, wobei P den Teilkörper $\{0, 1\}$ von K bezeichnet. Entscheidend dabei ist, dass es in $\tilde{K}$ für jedes $d \in \mathbb{N}$ genau einen Teilkörper mit 2^d Elementen gibt. Damit kann die Annahme, f wäre über K irreduzibel, relativ leicht zu einem Widerspruch geführt werden. Alternativ kann man auch eine Zerlegung von f über $K[x]$ explizit bestimmen, indem man eine allgemeine Zerlegung von f in zwei Faktoren vom Grad 2 in ansetzt.

Die bereits angesprochene Eindeutigkeit benötigt man auf jeden Fall in Teil (c), denn damit kann gezeigt werden, dass $K(\alpha)$ bereits der Zerfällungskörper von f über K ist, mit $[K(\alpha) : K] = 2$.