Aufgabe H18T1A4 (12 Punkte)

Seien $p > 0$ eine Primzahl, $\mathbb{Q} \subseteq K$ eine Körpererweiterung vom Grad p, $\alpha \in K$ ein Element mit $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, $\alpha_1 = \alpha, ..., \alpha_p \in \mathbb{C}$ die Konjugierten von α über $\mathbb{Q}$ und letztlich $E = \mathbb{Q}(\alpha_1, ..., \alpha_p)$ die normale Hülle von $K|\mathbb{Q}$.

(a) Zeigen Sie, z.B. durch Betrachten der Operation der Galoisgruppe auf den Nullstellen, dass die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(E|\mathbb{Q})$ eine zyklische Untergruppe der Ordnung p enthält.

(b) Zeigen Sie: Gilt $\alpha_2 \in K$, so folgt $K = E$.

Hinweise/Kommentare:

Teil (a) ergibt sich fast unmittelbar aus der Gradformel und dem Satz von Cauchy. Der Hinweis, die Operation der Galoisgruppe auf der Menge der Nullstellen zu betrachten, erscheint mir eher für Teil (b) als für Teil (a) sinnvoll.

Um den weitaus schwierigeren Teil (b) zu lösen, verwenden Sie die zyklische Untergruppe U aus Teil (a) und betrachten Sie deren Operation auf der Menge $\{\alpha_1, ..., \alpha_p\}$. Verwenden Sie den Zusammenhang zwischen Bahnläge und Index des Stabilisators, um zunächst zu zeigen, dass diese Operation transitiv ist. Verwenden Sie anschließend die Voraussetzung $\alpha_2 \in K$, um $\tau(K) \subseteq K$ für alle $\tau \in U$ nachzuweisen. Aus der Transitivität der Gruppenoperation folgt dann, dass die Elemente $\alpha_1, ..., \alpha_p$ alle in K liegen.