Aufgabe H18T1A2 (12 Punkte)

Sei G eine Gruppe.

(a) Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe von endlichem Index. Zeigen Sie, dass die Menge $\{gHg^{-1} \mid g \in G\}$ endlich ist.

(b) Es seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ und es seien $H_1, H_2 \subseteq G$ Untergruppen von G mit $(G : H_1) = n_1$ und $(G : H_2) = n_2$. (Für eine Untergruppe K von G bezeichnet $(G : K)$ den Index von G nach K.) Zeigen Sie, dass $(G : (H_1 \cap H_2)) \leq n_1 n_2$ ist.

(c) Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe von endlichem Index. Zeigen Sie, dass ein Normalteiler $N \subseteq G$ von endlichem Index existiert, für den $N \subseteq H$ gilt.

Hinweise/Kommentare:

Insgesamt handelt es sich um eine aufwändige und anspruchsvolle Aufgabe. Die Aussage unter (c) findet man in vielen Lehrbüchern; in der Vorlesung wird dieses Resultat mit Beweis aus Zeitgründen vermutlich eher selten vollständig behandelt, zumal es für keinen der in der Algebra üblicherweise behandelten Sätze als Voraussetzung gebraucht wird. Die Aufgabe eignet sich aber gut dazu, den Umgang mit Repräsentantensystemen zu trainieren.

In Teil (a) ist es naheliegend, zunächst die Implikation „$g_1 H = g_2 H \Rightarrow g_1 H g_1^{-1} = g_2 H g_2^{-1}$“ für beliebige $g_1, g_2 \in G$ zu beweisen. In Teil (b) muss als Zwischenschritt die Ungleichung $(H_1 : H_1 \cap H_2) \leq (G : H_2)$ bewiesen werden. Man verwendet dann endliche Repräsentantensysteme von G/H_1 und $H_1/(H_1 \cap H_2)$, um ein endliches Repräsentantensystem von $G/(H_1 \cap H_2)$ zu definieren.

In Teil (c) ist die entscheidende Beobachtung, dass jede Untergruppe H einer Gruppe G durch Übergang zum Durchschnitt $\bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$ zu einem Normalteiler gemacht werden kann. Man muss zeigen, dass aus der Endlichkeit von $(G : H)$ für jedes $g \in G$ auch die Endlichkeit von $(G : gHg^{-1})$ folgt. Hierzu muss ein Repräsentantensystem von G/H in ein Repräsentantensystem von G/gHg^{-1} umgewandelt werden. Danach kommt es nur noch darauf an, die Ergebnisse aus Teil (a) und (b) richtig anzuwenden.