Aufgabe H18T1A2 (12 Punkte)

Sei G eine Gruppe.

(a) Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe von endlichem Index. Zeigen Sie, dass die Menge $\{gHg^{-1} \mid g \in G\}$ endlich ist.

(b) Es seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ und es seien $H_1, H_2 \subseteq G$ Untergruppen von G mit $(G : H_1) = n_1$ und $(G : H_2) = n_2$. (Für eine Untergruppe K von G bezeichnet $(G : K)$ den Index von G nach K.) Zeigen Sie, dass $(G : (H_1 \cap H_2)) \leq n_1 n_2$ ist.

(c) Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe von endlichem Index. Zeigen Sie, dass ein Normalteiler $N \subseteq G$ von endlichem Index existiert, für den $N \subseteq H$ gilt.

Lösung:

zu (a) [*Vorüberlegung:* Die Gruppe G ist möglicherweise unendlich. In diesem Fall kann die Menge $\{gHg^{-1} \mid g \in G\}$ nur endlich sein, wenn $g_1 H g_1^{-1} = g_2 H g_2^{-1}$ auch für $g_1 \neq g_2$ möglich ist. Nun steht in der Angabe, dass der Index $(G : H)$, also die Anzahl der verschiedenen Linksnebenklassen von H, endlich ist. Es ist also naheliegend zu überprüfen, dass die Gleichung $g_1 H g_1^{-1} = g_2 H g_2^{-1}$ erfüllt ist, wenn die Nebenklassen $g_1 H$ und $g_2 H$ übereinstimmen.]

Sei $\mathcal{S} = \{gHg^{-1} \mid g \in G\}$ und $R \subseteq G$ ein Repräsentantensystem von G/H. Wir zeigen, dass die Abbildung $\phi : R \to \mathcal{S}$, $g \mapsto gHg^{-1}$ surjektiv ist. Daraus folgt dann die gewünschte Aussage. Denn laut Angabe ist $(G : H)$ endlich, wegen $|R| = (G : H)$ also auch die Menge R. Allgemein gilt: Ist $\psi : A \to B$ eine surjektive Abbildung und A endlich, dann ist auch B endlich. Aus der Surjektivität von ϕ folgt also tatsächlich die Endlichkeit der Menge $\mathcal{S}$.

Zum Nachweis der Surjektivität sei $gHg^{-1} \in \mathcal{S}$ vorgegeben, mit $g \in G$. Zu zeigen ist, dass gHg^{-1} im Bild von ϕ liegt. Da R ein Repräsentantensystem von G/H ist, gibt es ein $g_1 \in G$ mit $g_1 H = gH$. Zu zeigen ist $g_1 H g_1^{-1} = gHg^{-1}$, denn daraus folgt $\phi(g_1) = gHg^{-1}$. Wegen $g_1 \in gH$ gibt es ein $h_1 \in H$ mit $g_1 = gh_1$. Zum Nachweis von „$\subseteq$" sei $x \in g_1 H g_1^{-1}$ vorgegeben. Dann gilt $x = g_1 h g_1^{-1}$ für ein $h \in H$, und es folgt $x = (gh_1)h(gh_1)^{-1} = g(h_1 h h_1^{-1})g^{-1} \in gHg^{-1}$ wegen $h_1 h h_1^{-1} \in H$. Für den Nachweis von „$\supseteq$" sei $x \in gHg^{-1}$ vorgegeben, also $x = ghg^{-1}$ für ein $h \in H$. Dann folgt $x = (g_1 h_1^{-1})h(g_1 h_1^{-1})^{-1} = g_1(h_1^{-1} h h_1)g_1^{-1} \in g_1 H g_1^{-1}$ wegen $h_1^{-1} h h_1 \in H$.

zu (b) Sei $R_1 \subseteq G$ ein Repräsentantensystem von G/H_1 und $R_2 \subseteq H_1$ ein Repräsentantensystem von $H_1/(H_1 \cap H_2)$. Dann gilt zunächst $|R_1| = (G : H_1) = n_1$. Außerdem ist $|R_2| \leq n_2$. Denn für $h_1, h_1' \in R_2$ mit $h_1 H_2 = h_1' H_2$ gilt $(h_1')^{-1} h_1 \in H_1 \cap H_2$, also $h_1(H_1 \cap H_2) = h_1'(H_1 \cap H_2)$ und damit $h_1 = h_1'$, weil R_2 Repräsentantensystem von $H_1/(H_1 \cap H_2)$ ist. Die Abbildung $R_2 \to G/H_2$, $h_1 \mapsto h_1 H_2$ ist also injektiv, und es folgt $|R_2| \leq |G/H_2| = (G : H_2) = n_2$. Wir zeigen nun weiter unten, dass durch $\psi : R_1 \times R_2 \to G/(H_1 \cap H_2)$, $(g_1, g_2) \mapsto (g_1 g_2)(H_1 \cap H_2)$ eine surjektive Abbildung definiert ist. Daraus folgt dann $(G : H_1 \cap H_2) = |G/(H_1 \cap H_2)| \leq |R_1 \times R_2| = |R_1| \cdot |R_2| \leq n_1 n_2$ wie gewünscht.

Zum Nachweis der Surjektivität sei $g(H_1 \cap H_2) \in G/(H_1 \cap H_2)$ vorgegeben, mit $g \in G$. Weil R_1 ein Repräsentantensystem von G/H_1 ist, gibt es ein $g_1 \in R_1$ mit $gH_1 = g_1 H_1$. Es gilt also $g \in g_1 H_1$, und folglich existiert ein $h_1 \in H_1$ mit $g = g_1 h_1$. Weil R_2 ein Repräsentantensystem von $H_1/(H_1 \cap H_2)$ ist, existiert auch ein $g_2 \in H_1$ mit $h_1(H_1 \cap H_2) = g_2(H_1 \cap H_2)$. Insgesamt erhalten wir $\psi(g_1, g_2) = (g_1 g_2)(H_1 \cap H_2) = g_1 h_1(H_1 \cap H_2) = g(H_1 \cap H_2)$. Also ist ψ tatsächlich surjektiv.

zu (c) Wir zeigen, dass $N = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$ ein Normalteiler von G ist. Zunächst beweisen wir die Untergruppen-Eigenschaft. Für jedes $g_1 \in G$ ist laut Vorlesung durch $\kappa_{g_1} : G \to G$, $g \mapsto g_1 g g_1^{-1}$ („Konjugation mit g_1") ein Automorphismus von G definiert. Mit H ist auch $g_1 H g_1^{-1} = \kappa_{g_1}(H)$ als Bild unter diesem Automorphismus jeweils eine Untergruppe von G. Weil der Durchschnitt einer beliebigen Familie von Untergruppen der Gruppe wiederum eine Untergruppe ist, handelt es sich bei N also tatächlich um eine Untergruppe von G. Um zu zeigen, dass N ein Normalteiler ist, seien $g_1 \in G$ und $n \in N$ vorgegeben; zu zeigen ist $g_1 n g_1^{-1} \in N$. Nach Definition von N genügt es zu überprüfen, dass für beliebig vorgegebenes $g \in G$ jeweils $g_1 n g_1^{-1} \in gHg^{-1}$ erfüllt ist. Wegen $N \subseteq (g_1^{-1}g)H(g_1^{-1}g)^{-1}$ gibt es ein $h \in H$ mit $n = (g_1^{-1}g)h(g_1^{-1}g)^{-1} = g_1^{-1}ghg^{-1}g_1$. Es folgt $g_1 n g_1^{-1} = ghg^{-1} \in gHg^{-1}$, wie gewünscht. Damit ist der Nachweis von $N \trianglelefteq G$ abgeschlossen. Nach Definition von N gilt auch $N \subseteq e_G H e_G^{-1} = H$.

Weil $(G : H)$ endlich ist, gibt es nach Teil (a) eine endliche Anzahl r von Elementen $g_1, ..., g_r \in G$, so dass die Gleichung $\{gHg^{-1} \mid g \in G\} = \{g_i H g_i^{-1} \mid 1 \le i \le r\}$ erfüllt ist. Daraus folgt $N = \bigcap_{i=1}^r H_i$ mit $H_i = g_i H g_i^{-1} = \kappa_{g_i}(H)$ für $1 \le i \le r$. Wie bereits festgestellt, ist jedes H_i eine Untergruppe von G. Um zu sehen, dass $(G : H_i)$ jeweils endlich ist, zeigen wir, dass allgemein gilt: Ist $\phi : G \to G'$ ein Isomorphismus und H eine Untergruppe von G, dann folgt $(G : H) = (G' : \phi(H))$. Die Anwendung dieser Aussage auf $\phi = \kappa_{g_i}$ für $1 \le i \le r$ liefert dann die gewünschte Aussage.

Sei $R \subseteq G$ ein Repräsentantensystem von G/H. Zu zeigen ist, dass es sich bei $\phi(R)$ um ein Repräsentantensystem von $G'/\phi(H)$ handelt, denn daraus folgt dann $(G : H) = |R| = |\phi(R)| = (G' : \phi(H))$ wie gewünscht (wobei die Gleichung $|R| = |\phi(R)|$ aus der Bijektivität von ϕ folgt). Dafür wiederum müssen wir überprüfen, dass jede Linksnebenklassen in $G'/\phi(H)$ genau einen Repräsentanten aus $\phi(R)$ enthält. Sei dazu $g'\phi(H) \in G'/\phi(H)$ vorgegeben, mit $g' \in G'$. Weil ϕ bijektiv ist, gibt es ein $g \in G$ mit $\phi(g) = g'$. Weil R ein Repräsentantensystem von G/H ist, existiert ein $g_1 \in R$ mit $gH = g_1 H$. Es gilt also $g_1 \in gH$ und somit $g_1 = gh$ für ein $h \in H$. Daraus folgt $\phi(g_1) = \phi(g)\phi(h) = g'\phi(h) \in g'\phi(H)$. Als enthält $g'\phi(H)$ mindestens ein Element aus $\phi(R)$.

Nehmen wir nun an, dass $g'\phi(H)$ neben $\phi(g_1)$ noch ein weiteres Element aus $\phi(R)$ enthält, also ein Element der Form $\phi(g_2)$ mit $g_2 \in R$. Wegen $\phi(g_2) \in g'\phi(H)$ gibt es ein $h \in H$ mit $\phi(g_2) = g'\phi(h) = \phi(g)\phi(h) = \phi(gh)$. Auf Grund der Bijektivität von ϕ folgt $g_2 = gh \in gH$. Aus $g_1, g_2 \in gH$ folgt $g_1 = g_2$, weil R ein Repräsentantensystem von G/H ist, und somit $\phi(g_1) = \phi(g_2)$. Also ist in der Linksnebenklasse $g'\phi(H)$ tatsächlich genau ein Element der Menge $\phi(R)$ enthalten.

Also sind $H_1, ..., H_r$ tatsächlich Untergruppen von endlichem Index in G. Mit Teil (b) folgt daraus, dass auch $N = H_1 \cap ... \cap H_r$ eine Untergruppe von endlichem Index ist. Insgesamt ist N also ein Normalteiler von G mit $N \subseteq H$ und endlichem Indes $(G : N)$.