

Aufgabe H18T1A1 (12 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass das Polynom $x^7 + 3x + 3 \in \mathbb{Q}[x]$ irreduzibel ist.
- (b) Bestimmen Sie die Ordnung der Permutation $(1\ 2)(3\ 4)(5\ 6\ 7) \in S_7$.
- (c) Sei G eine abelsche Gruppe und seien $a, b, c \in G$. Angenommen a hat Ordnung 2, b hat Ordnung 4 und c hat Ordnung 6. Bestimmen Sie die Ordnung von $abc \in G$.
- (d) Bestimmen Sie alle Einheitswurzeln in dem Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

Hinweise/Kommentare:

Die Aufgabenteile (a), (b) und (c) sollten kein Problem sein, wenn man die Irreduzibilitätskriterien, die Rechenregel für Elementordnungen in S_n und die Rechenregeln für Elementordnungen in beliebigen Gruppen kennt. Für Teil (d) beachten Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subseteq \mathbb{R}$ gilt. Welche Einheitswurzeln sind in \mathbb{R} enthalten?