**Aufgabe H18T1A1** (12 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass das Polynom $x^7 + 3x + 3 \in \mathbb{Q}[x]$ irreduzibel ist.

(b) Bestimmen Sie die Ordnung der Permutation $(1\ 2)(3\ 4)(5\ 6\ 7) \in S_7$.

(c) Sei $G$ eine abelsche Gruppe und seien $a, b, c \in G$. Angenommen $a$ hat Ordnung 2, $b$ hat Ordnung 4 und $c$ hat Ordnung 6. Bestimmen Sie die Ordnung von $abc \in G$.

(d) Bestimmen Sie alle Einheitswurzeln in dem Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

*Lösung:*

zu (a) Nach dem Eisenstein-Kriterium, angewendet auf die Primzahl 3, ist $f = x^7 + 3x + 3$ irreduzibel in $\mathbb{Z}[x]$. Aus dem Gaußschen Lemma folgt, dass $f$ auch irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$ ist.

zu (b) Aus der Vorlesung ist bekannt: Sind $r, n \in \mathbb{N}$ und ist $\sigma \in S_n$ ein Produkt aus $r$ Zyklen der Längen $\ell_1, ..., \ell_r$, dann gilt $\mathrm{ord}(\sigma) = \mathrm{kgV}(\ell_1, ..., \ell_r)$. Das angegebene Element $(1\ 2)(3\ 4)(5\ 6\ 7) \in S_7$ hat also die Ordnung $\mathrm{kgV}(2, 2, 3) = 6$.

zu (c) Allgemein gilt: Ist $G$ eine Gruppe, $g \in G$ und $n \in \mathbb{N}$, so dass $g^n = e_G$ und $g^{n/p} \neq e_G$ für jeden Primteiler $p$ von $n$ gilt, dann folgt $\mathrm{ord}(g) = n$. Weil $G$ abelsch ist, gilt $(abc)^{12} = a^{12}b^{12}c^{12} = (a^2)^6(b^4)^3(c^6)^2 = e_G^6 \cdot e_G^3 \cdot e_G^2 = e_G$. Die einzigen Primteiler von 12 sind 2 und 3. Weiter gilt $(abc)^{12/2} = a^6 \cdot b^6 \cdot c^6 = (a^2)^3 \cdot b^4 \cdot b^2 \cdot c^6 = e_G^3 \cdot e_G \cdot b^2 \cdot e_G = b^2 \neq e_G$ wegen $\mathrm{ord}(b) = 4$ und $(abc)^{12/3} = a^4 \cdot b^4 \cdot c^4 = (a^2)^2 \cdot b^4 \cdot c^4 = e_G^2 \cdot e_G \cdot c^4 = c^4 \neq e_G$ wegen $\mathrm{ord}(c) = 6$. Auf Grund des angegebenen Kriteriums ist somit $\mathrm{ord}(abc) = 12$.

zu (d) Offenbar enthält $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ die Einheitswurzeln $\pm 1$. Sei nun $\zeta \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ eine beliebige Einheitswurzel. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\zeta^n = 1$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\zeta$ als $n$-te Einheitswurzel in der Form $e^{2\pi ik/n}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq k < n$ darstellbar ist. Wegen $e^{2\pi ik/n} = \cos(\frac{2\pi k}{n}) + i\sin(\frac{2\pi k}{n}) \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subseteq \mathbb{R}$ muss $\sin(\frac{2\pi k}{n}) = 0$ gelten. Weil die Nullstellen der Sinusfunktion genau die Elemente aus $\pi\mathbb{Z}$ sind, folgt $\frac{2\pi k}{n} = \pi\ell$ für ein $\ell \in \mathbb{Z}$. Weiter ist $\cos(\frac{2\pi k}{n}) = \cos(\pi\ell)$ gleich 1 oder $-1$, je nachdem, ob $\ell$ gerade oder ungerade ist. Daraus folgt $e^{2\pi ik/n} \in \{\pm 1\}$. Also sind $\pm 1$ die einzigen beiden Einheitswurzeln in $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

*Anmerkung:* Eventuell kann in Teil (d) auch einfach als bekannt voraussetzen, dass $\pm 1$ die einzigen reellen Einheitswurzeln sind. Dann kann man die Lösung natürlich wesentlich kürzer formulieren.