Aufgabe H17T3A5 (12 Punkte)

Es seien K ein Teilkörper von $\mathbb{R}$ und $f \in K[x]$ ein Polynom. Weiter sei $Z \subseteq \mathbb{C}$ ein Zerfällungskörper von f über K. Der Grad $[Z : K]$ sei ungerade. Zeigen Sie, dass dann auch Z ein Teilkörper von $\mathbb{R}$ ist.

Lösung:

Sei N die Menge der komplexen Nullstellen von f. Dann gilt $Z = K(N)$ nach Definition des Zerfällungskörpers. Nehmen wir nun an, dass $Z \nsubseteq \mathbb{R}$ gilt. Dann muss auch die Nullstellenmenge N ein nicht-reelles Element α enthalten. Sei $M = K(\alpha, \bar{\alpha})$ und $M_0 = M \cap \mathbb{R}$, wobei $\bar{\alpha}$ das zu α konjugiert-komplexe Element bezeichnet. Wir zeigen, dass $[M_0(\alpha) : M_0] = 2$ gilt und betrachten dazu das Polynom $g = (x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha}$.

Offenbar sind die Koeffizienten $\alpha + \bar{\alpha} = 2\mathrm{Re}(\alpha)$ und $\alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2$ in M_0 enthalten, es gilt also $g \in M_0[x]$. Außerdem ist g normiert und erfüllt $g(\alpha) = 0$. Wäre g über M_0 reduzibel, dann müsste wegen $\mathrm{grad}(g) = 2$ die Nullstelle α von g in M_0 liegen. Aber dies ist wegen $M_0 \subseteq \mathbb{R}$ und $\alpha \notin \mathbb{R}$ nicht der Fall. Insgesamt ist g also das Minimalpolynom von α über M_0, und es folgt $[M_0(\alpha) : M_0] = \mathrm{grad}(g) = 2$.

Wegen $\{\alpha, \bar{\alpha}\} \subseteq N$ und $Z = K(N)$ ist $M = K(\alpha, \bar{\alpha})$ ein Zwischenkörper von $Z|K$, und wegen $\mathbb{R} \supseteq K$ gilt dasselbe für $M_0 = M \cap \mathbb{R}$. Wegen $\alpha \in Z$ ist $M_0(\alpha)$ ein Zwischenkörper von $Z|M_0$. Durch zweimalige Anwendung der Gradformel erhalten wir

$$\begin{aligned} [Z : K] \quad &= \quad [Z : M_0] \cdot [M_0 : K] \quad = \quad [Z : M_0(\alpha)] \cdot [M_0(\alpha) : M_0] \cdot [M_0 : K] \\ &= \quad 2 \cdot [Z : M_0(\alpha)] \cdot [M_0 : K]. \end{aligned}$$

Somit wäre $[Z : K]$ gerade, im Widerspruch zur Vorausetzung. Dies zeigt, dass die Annahme $Z \nsubseteq \mathbb{R}$ falsch war.