Aufgabe H17T3A3 (12 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und sei $a \in R$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Das Element $1 + ax$ ist eine Einheit im Polynomring $R[x]$.

(ii) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n = 0$.

Lösung:

„(i) $\Rightarrow$ (ii)“ Ist $1 + ax$ eine Einheit in $R[x]$, dann gibt es ein Element $f \in R[x]$ mit $(1 + ax)f = 1$. Sei $f = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ mit $m \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, ..., a_m \in R$. Dann gilt

$$(1+ax)f = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (1+ax)\left(\sum_{k=0}^{m} a_k x^k\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{m} a_k x^k + \sum_{k=0}^{m} a_k a x^{k+1} = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{m} a_k x^k + \sum_{k=1}^{m+1} a_{k-1} a x^k = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a_0 + \sum_{k=1}^{m} (a_k + a_{k-1}a) x^k + a_m a x^{m+1} = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$a_0 = 1 \quad \text{und} \quad a_k = -a_{k-1}a \text{ für } 1 \le k \le m \quad \text{und} \quad a_m = 0.$$

Durch einen einfachen Induktionsbeweis erhält man $a_k = (-1)^k a^k$ für $1 \le k \le m$ (wobei wir $c^0 = 1$ für alle $c \in R$ setzen). Tatsächlich ist die Gleichung für $k = 0$ wegen $a_0 = 1$ erfüllt, und setzen wir sie für ein $k \in \{0, ..., m-1\}$ voraus, dann folgt $a_{k+1} = -a_k a = -((-1)^k a^k) \cdot a = (-1)^{k+1} a^{k+1}$. Insbesondere gilt $(-1)^m a^m = a_m = 0$ und somit $a^m = 0$.

„(ii) $\Rightarrow$ (i)“ Wir zeigen durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$, dass aus $a^n = 0$ jeweils $1 + ax \in R[x]^\times$ folgt. Für $n = 1$ ist dies erfüllt, denn aus $a = 0$ folgt $1 + ax = 1 \in R[x]^\times$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$, und setzen wir die Aussage für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \le n$ voraus. Sei $a \in R$ ein Ringelement mit $a^{n+1} = 0$; zu zeigen ist $1 + ax \in R[x]^\times$. Setzen wir $b = -a^2$, dann $b^n = (-a^2)^n = (-1)^n a^{2n} = (-1)^n a^{n+1} \cdot a^{n-1} = 0 \cdot a^{n-1} = 0$. Wir können also die Induktionsvoraussetzung auf $b = -a^2$ anwenden und erhalten $1 - a^2 x \in R[x]^\times$. Es gibt also ein $f \in R[x]$ mit $(1 - a^2 x)f = 1$. Setzen wir für x das Quadrat x^2 auf der linken Seite ein, so erhalten wir $(1 - a^2 x^2) f(x^2) = 1$, und durch Anwendung der dritten binomischen Formel erhalten wir

$$(1 + ax)(1 - ax) f(x^2) = 1.$$

Setzen wir also $h = (1 - ax) f(x^2)$, dann ist $(1 + ax)h = 1$ erfüllt und somit $1 + ax$ eine Einheit in $R[x]$.