Aufgabe H17T3A2 (keine Punktzahl angegeben)

Sei G eine (additiv geschriebene) abelsche Gruppe. Ist die Menge

$$\{n \in \mathbb{N} \mid na = 0 \text{ für alle } a \in G\}$$

nicht leer, so heißt deren Minimum der *Exponent* der Gruppe G und wird mit $\exp(G)$ bezeichnet. Ist die obige Menge leer, so setzt man $\exp(G) = \infty$. Zeigen Sie:

(a) Ist G endlich, so ist $\exp(G) = \max\{\mathrm{ord}(a) \mid a \in G\}$.

(b) Die abelsche Gruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist eine Torsionsgruppe (d.h. zu jedem $x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nx = 0$) mit $\exp(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \infty$.

Lösung:

zu (a) Sei $S = \{n \in \mathbb{N} \mid na = 0 \; \forall \; a \in G\}$ und $T = \{\mathrm{ord}(a) \mid a \in G\}$. Weil $m = |G|$ endlich ist, gilt $ma = 0$ für alle $a \in G$. Dies zeigt, dass $m \in S$ gilt und S somit nicht leer ist. Für jedes $n \in S$ gilt $na = 0$ für alle $a \in G$, also $\mathrm{ord}(a) \mid n$ und insbesondere $\mathrm{ord}(a) \leq n$ für alle $a \in G$. Dies zeigt $n \geq \max T$ für jedes $n \in S$ und somit $\exp(G) = \min S \geq \max T$.

Um nun die Gleichheit $\exp(G) = \max T$ zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass ein Element $n \in S \cap T$ existiert, denn daraus folgt dann die umgekehrte Gleichung $\exp(G) = \min S \leq n \leq \max T$. Die Gruppe G ist endlich und abelsch. Nach dem Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen gibt es somit ein $r \in \mathbb{N}$ und $d_1, ..., d_r$ mit $d_i \mid d_{i+1}$ für $1 \leq i \leq r$ und

$$G \quad \cong \quad \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}.$$

Weil endliche isomorphe Gruppen für jede Zahl d dieselbe Anzahl von Elementen der Ordnung d haben, könen wir annehmen, dass $G = \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}$ gilt. Wir zeigen, dass $n = d_r$ ein Element aus $S \cap T$ ist. Einerseits gilt für alle Elemente $g = (\bar{a}_1, ..., \bar{a}_r) \in G$ jeweils $ng = n(\bar{a}_1, ..., \bar{a}_r) = (\bar{0}, ..., \bar{0})$ und somit $n \in S$. Andererseits ist $h = (\bar{0}, ..., \bar{0}, \bar{1})$ offenbar ein Element der Ordnung n in G, denn für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist $kh = (\bar{0}, ..., \bar{0}, \bar{k}) = (\bar{0}, ..., \bar{0})$ äquivalent zu $n \mid k$. Also ist n auch in T enthalten.

zu (b) Ist $x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, dann gibt es ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $x = r + \mathbb{Z}$, $r = \frac{a}{n}$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Wegen $a \in Z$ gilt $nx = n(r + \mathbb{Z}) = nr + \mathbb{Z} = a + \mathbb{Z} = \mathbb{Z} = 0_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$. Wäre $\exp(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ endlich, dann wäre die Menge S nicht leer, es gäbe also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nx = 0$ für alle $x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Setzen wir aber $x = \frac{1}{2n}$, dann gilt $nx = n(\frac{1}{2n} + \mathbb{Z}) = n \cdot \frac{1}{2n} + \mathbb{Z} = \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$, und wegen $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ ist $\frac{1}{2} + \mathbb{Z} \neq 0_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$. Der Widerspruch zeigt, dass $\exp(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \infty$ gelten muss.