**Aufgabe H17T3A1** (12 Punkte)

Es sei $G$ eine Gruppe der Ordnung $|G| = 992 = 2^5 \cdot 31$. Für eine Primzahl $p$ bezeichne $n_p$ die Anzahl der $p$-Sylowgruppen von $G$.

(a) Geben Sie die prinzipiellen Möglichkeiten für die Werte von $n_2$ und $n_{31}$ an, die sich aus den Sylowsätzen ergeben.

(b) Zeigen Sie (ohne den Satz von Burnside zu benutzen), dass $G$ auflösbar ist.

*Lösung:*

zu (a) Auf Grund der Sylowsätze gilt $n_{31} \mid 2^5$, also $n_{31} \in \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$. Außerdem gilt $n_{31} \equiv 1 \mod 31$. Wegen $2, 4, 8, 16 \not\equiv 1 \mod 31$ folgt $n_{31} \in \{1, 32\}$. Für die Primzahl 2 gilt auf Grund der Sylowsätze entsprechend $n_2 \mid 31$, also $n_2 \in \{1, 31\}$; wegen $31 \equiv 1 \mod 2$ liefert die Kongruenz $n_2 \equiv 1 \mod 2$ hier keine weitere Einschränkung.

zu (b) Zunächst betrachten wir den Fall $n_2 = 31$ und $n_{31} = 32$. Wegen $|G| = 2^5 \cdot 31^1$ sind die 31-Sylowgruppen genau die Untergruppen von $G$ der Ordnung 31. Weil 31 eine Primzahl ist, ist jede solche Untergruppe zyklisch und enthält genau $\varphi(31) = 30$ Elemente der Ordnung 31. Umgekehrt liegt jedes $g \in G$ mit $\mathrm{ord}(g) = 31$ in genau einer Untergruppe der Ordnung 31, nämlich $\langle g \rangle$. Insgesamt gibt es somit 30-mal soviele Elemente der Ordnung 31, wie es Untergruppen der Ordnung 31 in $G$ gibt, also genau $30n_{31} = 30 \cdot 32 = 960$ Stück.

Wegen $n_2 = 31$ gibt es auf jeden Fall zwei verschiedene 2-Sylowgruppen $P, Q$ in $G$. Wegen $|G| = 2^5 \cdot 31^1$ gilt $|P| = |Q| = 2^5 = 32$. Weil $P \cap Q$ eine gemeinsame echte Untergruppe von $P$ und $Q$ ist, ist $|P \cap Q|$ ein echter Teiler von $|P| = 32$, also $|P \cap Q| \leq 16$. Es folgt $|P \cup Q| \geq |P| + |Q| - |P \cap Q| = 32 + 32 - 16 = 48$. Weil die Ordnung jedes Elements in $P \cup Q$ ein Teiler von 32 ist, gibt es in $G$ also mindestens 48 Elemente der Ordnung 1, 2, 4, 8, 16 oder 32. Zusammen mit den 960 Elementen der Ordnung 31 kommen wir so auf mindestens $960 + 48 = 1008$ Elemente in $G$, im Widerspruch zu $|G| = 992$. Dies zeigt, dass der Fall $n_2 = 31$ und $n_{31} = 32$ nicht eintreten kann.

Betrachten wir nun den Fall $n_2 = 1$ und $n_{31} = 32$. Sei $P$ die einzige 2-Sylowgruppe von $G$. Auf Grund der Sylowsätze ist $P$ Normalteiler von $G$, und als Gruppe von 2-Potenzordnung ist $P$ auflösbar. Weil $|G/P| = (G : P) = \frac{|G|}{|P|} = \frac{992}{32} = 31$ eine Primzahl ist, handelt es sich bei $G/P$ um eine zyklische, damit insbesondere um eine abelsche und damit auch auflösbare Gruppe. Aus $P \trianglelefteq G$ und der Auflösbarkeit von $P$ und $G/P$ folgt laut Vorlesung die Auflösbarkeit von $G$.

Zum Schluss betrachten wir den Fall, dass $n_{31} = 1$ (und $n_2$ beliebig) ist. Sei $Q$ die einzige 31-Sylowgruppe von $G$. Weil $|Q| = 31$ eine Primzahl ist, ist $Q$ zyklisch und damit auflösbar. Laut Sylowsätzen gilt $Q \trianglelefteq G$. Die Faktorgruppe $G/Q$ ist wegen $|G/Q| = (G : Q) = \frac{|G|}{|Q|} = \frac{992}{31} = 32$ von 2-Potenzordnung und damit auflösbar. Aus $Q \trianglelefteq G$ und der Auflösbarkeit der Gruppen $Q$ und $G/Q$ folgt wiederum die Auflösbarkeit von $G$.