Aufgabe H17T2A5 (8 Punkte)

Das irreduzible Polynom $f \in \mathbb{Q}[x] \setminus \{0\}$ besitze eine Nullstelle $\alpha \in \mathbb{R}$ und eine Nullstelle $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Sei f der Zerfällungskörper von f in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$ nicht abelsch ist.

Lösung:

Das Polynom f ist über $\mathbb{Q}$ irreduzibel,und α, β sind Nullstellen von f. Auf Grund des Fortsetzungssatzes gibt es somit ein Element σ der Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$ mit $\sigma(\alpha) = \beta$. Durch Einschränkung der komplexen Konjugationsabbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ auf L erhalten wir außerdem einen $\mathbb{Q}$-Homomorphismus $\iota : L \to \mathbb{C}$. Weil $L|\mathbb{Q}$ normal ist, handelt es sich bei ι um einen $\mathbb{Q}$-Automorphismus von L, also ebenfalls um ein Element der Gruppe G. Wegen $\beta \notin \mathbb{R}$ gilt nun einerseits $\beta \neq \bar{\beta}$ und $(\iota \circ \sigma)(\alpha) = \iota(\beta) = \bar{\beta}$, wegen $\alpha \in \mathbb{R}$ andererseits $(\sigma \circ \iota)(\alpha) = \sigma(\alpha) = \beta$. Es ist also $\iota \circ \sigma \neq \sigma \circ \iota$. Dies zeigt, dass G nicht abelsch ist.