**Aufgabe H17T2A2** (15 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $S_n$ die $n$-te symmetrische Gruppe. Die Gruppe $S_n$ und ihre Untergruppen operieren in natürlicher Weise von links auf der Menge $\{1, ..., n\}$. Ferner sei $p$ eine Primzahl.

(a) Für Untergruppen $G_1$ und $G_2$ in $S_n$ sei $G_2$ ein Normalteiler in $G_1$ und $G_1$ operiere transitiv auf der Menge $\{1, ..., n\}$. Zeigen Sie, dass alle $G_2$-Bahnen in $\{1, ..., n\}$ dieselbe Länge haben.

(b) Für Untergruppen $G_1$ und $G_2$ in $S_p$ sei $G_2$ ein Normalteiler in $G_1$ und $G_1$ operiere transitiv auf der Menge $\{1, ..., p\}$. Zeigen Sie, dass $G_2$ transitiv auf $\{1, ..., p\}$ operiert, falls $G_2 \neq \{\mathrm{id}\}$ gilt.

(c) Sei $H$ eine Untergruppe von $S_p$, die transitiv auf $\{1, ..., p\}$ operiert und eine Primzahlordnung $q$ hat. Zeigen Sie, dass $p = q$ gilt und $H$ ein Element der Ordnung $p$ enthält.

*Lösung:*

zu (a) Sei $M_n = \{1, ..., n\}$, und seien $k, \ell \in M_n$. Weil $G_1$ auf $M_n$ transitiv operiert, gibt es ein $\sigma \in G_1$ mit $\sigma(k) = \ell$. Wir überprüfen, dass durch $\phi : G_2(k) \to M_n$, $r \mapsto \sigma(r)$ eine Bijektion zwischen $G_2(k)$ und $G_2(\ell)$ definiert ist; daraus folgt dann $|G_2(k)| = |G_2(\ell)|$ wie gewünscht. Zunächst überprüfen wir, dass $\phi(r) \in G_2(\ell)$ für alle $r \in G_2(k)$ gilt. Sei dazu $r \in G_2(k)$ vorgegeben. Dann existiert nach Definition ein $\tau \in G_2$ mit $\tau(k) = r$. Wegen $G_2 \trianglelefteq G_1$ liegt $\tau' = \sigma\tau\sigma^{-1}$ in $G_2$. Es gilt nun $\tau'\sigma = \sigma\tau$ und somit $\phi(r) = \sigma(r) = (\sigma \circ \tau)(k) = (\tau' \circ \sigma)(k) = \tau'(\ell) \in G_2(\ell)$.

Die Injektivität von $\phi$ ist klar, denn als Permutation ist $\sigma : M_n \to M_n$ injektiv und damit auch $\phi = \sigma|_{G_2(k)}$. Wir überprüfen nun noch die Surjektivität. Sei dazu $s \in G_2(\ell)$ vorgegeben, also $s = \tau'(\ell)$ für ein $\tau' \in G_2$. Wiederum auf Grund der Normalteiler-Eigenschaft von $G_2$ in $G_1$ liegt $\tau = \sigma^{-1}\tau'\sigma$ in $G_2$, außerdem gilt $\tau'\sigma = \sigma\tau$. Setzen wir nun $r = \tau(k)$, dann gilt $r \in G_2(k)$ und außerdem erhalten wir $\phi(r) = \sigma(r) = (\sigma \circ \tau)(k) = (\tau' \circ \sigma)(k) = \tau'(\ell) = s$.

zu (b) Laut Vorlesung bilden die Bahnen der Operation von $G_2$ auf $M_p$ eine Zerlegung von $M_p$. Die Menge $M_p$ kann also also disjunkte Vereinigung $M_p = \bigcup_{i=1}^{t} B_i$, wobei $t \in \mathbb{N}$ ist und $B_1, ..., B_t$ die verschiedenen Bahnen von $G_2$ bezeichnen. Nach Teil (a) haben Bahnen dieselbe Länge, es gibt also ein $s \in \mathbb{N}$ mit $|B_i| = s$ für $1 \leq i \leq t$. Wir erhalten

$$p \quad = \quad |M_p| \quad = \quad \sum_{i=1}^{t} |B_i| \quad = \quad \sum_{i=1}^{t} s \quad = \quad st.$$

Weil $p$ eine Primzahl ist, muss einer der beiden Faktoren $s, t$ gleich 1 sein. Wäre $s = 1$ und $t = p$, dann wäre jede Bahn einelementig. Nach Vertauschung der Bahnen $B_1, ..., B_p$ könnten wir $B_i = \{i\}$ für $1 \leq i \leq p$ annehmen. Nach Definition der Bahnen gilt $\sigma(B_i) \subseteq B_i$, und somit wäre $\sigma(i) = i$ für $1 \leq i \leq p$. Daraus würde $\sigma = \mathrm{id}$ für alle $\sigma \in G_2$, also $G_2 = \{\mathrm{id}\}$ folgen, was aber nach Voraussetzung ausgeschlossen ist. Also bleibt nur die Möglichkeit $s = p$ und $t = 1$. Die Operation von $G_2$ auf $M_p$ besitzt also nur eine Bahn, mit anderen Worten, $G_2$ operiert auf $M_p$ transitiv.

zu (c) Sei $H \subseteq S_p$ eine Untergruppe mit der angegebenen Eigenschaft. Laut Vorlesung gilt für jedes $k \in M_p$ jeweils $|H(k)| = (H : H_k)$, wobei $H_k = \{\sigma \in H \mid \sigma(k) = k\}$ den Stabilisator von $k$ in $H$ bezeichnet. Weil $H$ auf $M_p$ transitiv operiert, folgt $M_p = H(k)$ und somit $p = |M_p| = |H(k)| = (H : H_k)$. Wir erhalten $q = |H| = (H : H_k)|H_k| = p \cdot |H_k|$. Weil $p$ und $q$ beides Primzahlen sind, muss $p = q$ und $|H_k| = 1$ gelten. Als Gruppe von Primzahlordnung ist $H$ zyklisch, es gibt in $H$ also ein Element der Ordnung $|H| = p$.