Aufgabe H17T2A1 (8 Punkte)

Sei K ein Körper. Eine quadratische Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ heißt *nilpotent*, wenn ein $m \in \mathbb{N}$ mit $A^m = 0$ existiert. Zeigen Sie

(a) Ist $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ nilpotent, so gilt für das charakteristische Polynom $\chi_A = x^n$.

(b) Ist $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ nilpotent und diagonalisierbar, so gilt $A = 0$.

Lösung:

zu (a) Sei $L = K^{\mathrm{alg}}$ ein algebraischer Abschluss von K. Dann zerfällt das charakteristische Polynom χ_A über L in Linearfaktoren, genauer gilt $\chi_A = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$, wobei die Menge $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \subseteq L$ der Nullstellen von χ_A mit der Menge der Eigenwerte von A in L übereinstimmt. Für jedes $i \in \{1, ..., n\}$ sei $v_i \in L^n \setminus \{0\}$ jeweils ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_i.

Weil A nilpotent ist, gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $A^m = 0$. Für $1 \leq i \leq n$ folgt aus $Av_i = \lambda_i v_i$ jeweils $\lambda_i^m v_i = A^m v_i = 0 v_i = 0$. Wegen $v_i \neq 0$ muss $\lambda_i^m = 0$ und somit auch $\lambda_i = 0$ gelten. Dies wiederum bedeutet $\chi_A = \prod_{i=1}^n (x - 0) = x^n$.

zu (b) Ist A nicht nur nilpotent, sondern auch diagonalisierbar, dann existiert eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ und $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$, so dass $D = TAT^{-1}$ eine Diagonalmatrix mit den Einträgen $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ist. Wiederum ist $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \subseteq K$ dann die Menge der Eigenwerte von A. Wie wir bereits in Teil (a) gesehen haben, hat eine nilpotente Matrix keine Eigenwerte außer 0. Es folgt $\lambda_i = 0$ für $1 \leq i \leq n$, damit $D = 0$ und schließlich $A = T^{-1}DT = T^{-1} \cdot 0 \cdot T = 0$.