Aufgabe H17T1A5 (14 Punkte)

Sei $K = \mathbb{C}(t)$ der Quotientenkörper des Polynomrings $\mathbb{C}[t]$ und $f = x^3 - 2tx + t \in K[x]$. Zeigen Sie, dass f irreduzibel in $K[x]$ ist.

Lösung:

Der Ring $R = \mathbb{C}[t]$ ist als Polynomring über einem Körper faktoriell, und K ist nach Definition der Quotientenkörper von R. Das Element t ist (als Polynom vom Grad 1) in $\mathbb{C}[t]$ irreduzibel, weil R faktoriell ist also ein Primelement. Wir bemerken nun, dass f als Element von $R[x]$ die Voraussetzungen des Eisenstein-Kriteriums erfüllt: Als normiertes Polynom ist es primitiv, das Primelement $\pi = t$ teilt außer dem Leitkoeffizienten alle anderen Koeffizienten (0, $-2t$ und t), es teilt den Koeffizienten t im Grad 0 aber nicht quadratisch. Also ist f in $R[x]$ und nach dem Gaußschen Lemma auch in $K[x]$ irreduzibel.