Aufgabe H17T1A4 (14 Punkte)

Sei $\omega = (-1+\sqrt{3}i)/2 \in \mathbb{C}$. Wir betrachten die Abbildung

$$\phi : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{C} \quad , \quad f \mapsto f(\omega).$$

Diese ist ein Ringhomomorphismus (das brauchen Sie nicht zu zeigen).

(a) Bestimmen Sie die Dimension des Bildes von ϕ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

(b) Bestimmen Sie den Kern von ϕ.

(c) Untersuchen Sie, ob der Kern von ϕ ein maximales Ideal in $\mathbb{Q}[x]$ ist.

Lösung:

zu (a) Bei ω handelt es sich um eine primitive dritte Einheitswurzel, und als solche ist sie eine Nullstelle des dritten Kreisteilungspolynoms $g = x^2 + x + 1$. Dieses Polynom ist außerdem normiert und (als Kreisteilungspolynom) irreduzibel über $\mathbb{Q}$. Insgesamt ist g also das Minimalpolynom von ω über $\mathbb{Q}$, und es folgt $[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}] = \mathrm{grad}(g) = 2$. Also ist $\mathbb{Q}(\omega)$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum der Dimension 2.

Wir zeigen nun, dass $\mathbb{Q}(\omega)$ mit dem Bild von ϕ übereinstimmt Das Bild von ϕ ist gegeben durch $\{f(\omega) \mid f \in \mathbb{Q}[x]\}$. Es handelt sich um den von ω erzeugten Erweiterungsring $\mathbb{Q}[\omega]$ in $\mathbb{C}$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass der erzeugte Erweiterungs*körper* $\mathbb{Q}(\omega)$ wegen $[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}] = 2$ durch $\mathbb{Q}(\omega) = \{f(\omega) \mid f \in \mathbb{Q}[x] \ , \ \mathrm{grad}(f) \le 1\}$ gegeben ist. Es gilt also $\mathbb{Q}(\omega) \subseteq \mathbb{Q}[\omega]$. Andererseits muss $\mathbb{Q}[\omega] \subseteq \mathbb{Q}(\omega)$ gelten, den jeder Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}$ ist zugleich auch ein Erweiterungsring von $\mathbb{Q}$, und $\mathbb{Q}[\omega]$ ist nach Definition der *kleinste* Erweiterungsring von $\mathbb{Q}$, der ω enthält. Insgesamt gilt also $\mathbb{Q}[\omega] = \mathbb{Q}(\omega)$.

zu (b) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass jedes Polynom in $\mathbb{Q}[x]$, dass ω als Nullstelle hat, ein Vielfaches des Minimalpolynoms g ist. Somit gilt für alle $f \in \mathbb{Q}[x]$ die Äquivalenz

$$f \in \ker(\phi) \quad \Leftrightarrow \quad \phi(f) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(\omega) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g \mid f \quad \Leftrightarrow \quad f \in (g) \quad ,$$

wobei (g) das von g in $\mathbb{Q}[x]$ erzeugte Hauptideal bezeichnet. Es gilt also $\ker(\phi) = (g)$.

zu (c) Weil wie in Teil (a) bemerkt g in $\mathbb{Q}[x]$ ein irreduzibles Element und außerdem $\mathbb{Q}[x]$ ein Hauptidealring ist, handelt es sich bei (g) um ein maximales Ideal. (Hier könnte auch mit dem Homomorphiesatz argumentieren: Es gilt $\ker(\phi) = (g)$ und $\mathrm{im}(\phi) = \mathbb{Q}(\omega)$, daraus folgt $\mathbb{Q}[x]/(g) \cong \mathbb{Q}(\omega)$. Mit $\mathbb{Q}(\omega)$ ist also auch $\mathbb{Q}[x]/(g)$ ein Körper. Daraus folgt, dass (g) in $\mathbb{Q}[x]$ ein maximales Ideal ist.