Aufgabe H17T1A3 (14 Punkte)

Man zeige, dass keine der folgenden zwei Gruppen isomorph sind:

(i) Die Einheitengruppe von $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$,

(ii) die Einheitengruppe von $\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$,

(iii) die alternierende Gruppe A_4, und

(iv) die Diedergruppe D_6 (Symmetriegruppe des regelmäßigen 6-Ecks).

Lösung:

Die Gruppen $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^\times$ und $(\mathbb{Z}/28\mathbb{Z})^\times$ sind abelsch, weil die multiplikative Verknüpfung der Ringe $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$ abelsch ist. Dagegen ist A_4 nicht abelsch; zum Beispiel liegen die Elemente $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)$ und $\tau = (1\ 2\ 3)$ beide in A_4, es gilt aber $\sigma \circ \tau = (1\ 2)(3\ 4)(1\ 2\ 3) = (2\ 4\ 3)$ und $\tau \circ \sigma = (1\ 2\ 3)(1\ 2)(3\ 4) = (1\ 3\ 4)$, also $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$. Ebenso ist D_6 nicht abelsch, was man z.B. an den Elementen $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$ und $\tau = (1\ 6)(2\ 5)(3\ 4)$ erkennen kann. Hier gilt

$$\sigma \circ \tau \quad = \quad (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)(1\ 6)(2\ 5)(3\ 4) \quad = \quad (2\ 6)(3\ 5)$$

und

$$\tau \circ \sigma \quad = \quad (1\ 6)(2\ 5)(3\ 4)(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6) \quad = \quad (1\ 5)(2\ 4)$$

also wiederum $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$. Somit ist keine der Gruppen unter (i) und (ii) isomorph zu einer der Gruppen unter (iii) und (iv).

Es bleibt also zu zeigen, dass $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^\times$ nicht zu $(\mathbb{Z}/28\mathbb{Z})^\times$ und A_4 nicht zu D_6 isomorph ist. Weil 13 eine Primzahl ist, handelt es sich bei $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ um einen Körper, und somit ist $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^\times$ eine zyklische Gruppe der Ordnung 12. Auf Grund des Chinesischen Restsatzes gilt andererseits $(\mathbb{Z}/28\mathbb{Z})^\times \cong (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times$. Weil auch 7 eine Primzahl ist, gilt $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, außerdem ist $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ bekannt. Damit erhalten wir insgeasmt $(\mathbb{Z}/28\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Die Ordnung eines beliebigen Elements $(\bar{a}, \bar{b}) \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist Teiler von 6, denn es gilt jeweils $6(\bar{a}, \bar{b}) = (\overline{6a}, \overline{6b}) = (\bar{0}, \bar{0})$. Wäre $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ zyklisch, dann müsste ein Element der Ordnung 12 in dieser Gruppe existieren. Also sind $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $(\mathbb{Z}/28\mathbb{Z})^\times$ im Gegensatz zu $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^\times$ nicht zyklisch. Dies zeigt, dass $(\mathbb{Z}/28\mathbb{Z})^\times$ und $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^\times$ nicht isomorph sind.

In der Gruppe D_6 existiert mit $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$ ein Element der Ordnung 6 (die „Drehung“ um den Winkel $\frac{2\pi}{6}$). Die Gruppe A_4 besteht aus der Identität, den 3-Zyklen und den Doppeltranspositionen; hier gibt es also nur Elemente der Ordnungen 1, 2 und 3. Also sind auch D_6 und A_4 nicht isomorph.