Aufgabe H17T1A2 (10 Punkte)

Sei R ein kommutativer unitärer Ring, der den endlichen Körper $\mathbb{F}_p$ enthält. Zeigen Sie, dass die Abbildung $F : R \to R$, $F(x) = x^p$, ein Ringhomomorphismus ist. Geben Sie je ein Beispiel für solch einen Ring an, für den $F : R \to R$

(a) ein Isomorphismus

(b) kein Isomorphismus

ist (mit Begründung).

Lösung:

Jeder Ring R, der $\mathbb{F}_p$ als Teilring enthält, ist von Charakteristik p, denn es gilt $p \cdot 1_R = p \cdot 1_{\mathbb{F}_p} = 0_{\mathbb{F}_p}$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass wegen $\mathrm{char}(R) = p$ für alle $a, b \in R$ die Gleichung $(a+b)^p = a^p + b^p$ erfüllt ist. Daraus folgt $F(a+b) = F(a) + F(b)$ für alle $a, b \in R$. Desweiteren gilt auch $F(ab) = (ab)^p = a^p b^p = F(a)F(b)$ für alle $a, b \in R$ und $F(1_R) = 1_R^p = 1_R$. also ist F tatsächlich ein Ringhomomorphismus.

zu (a) Wir zeigen, dass F für den Ring $\mathbb{F}_p$ ein Isomorphismus ist. Da wir bereits wissen, F ein Ringhomomorphismus ist, genügt es, die Bijektivität zu überprüfen. Ist $a \in \mathbb{F}_p^\times$, so gilt $a^{p-1} = \bar{1}$, weil $\mathbb{F}_p^\times$ eine Gruppe der Ordnung $p-1$ ist. Es folgt $a^p = a$ für alle $a \in \mathbb{F}_p^\times$, und offenbar ist diese Gleichung auch für $a = 0_{\mathbb{F}_p}$ erfüllt. Insgesamt ist damit $F = \mathrm{id}_{\mathbb{F}_p}$ nachgewiesen, und diese Abbildung ist eine Bijektion.

zu (b) Sei $R = \mathbb{F}_p[x]$, und sei $f \in R$ beliebig vorgegeben, $f = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, ..., a_n \in \mathbb{F}_p$. Wegen $\mathrm{char}(R) = p$ gilt dann

$$F(f) \quad = \quad \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right)^p \quad = \quad \sum_{k=0}^n (a_k x^k)^p \quad = \quad \sum_{k=0}^n a_k^p x^{kp} \quad = \quad \sum_{k=0}^n a_k (x^p)^k \quad \in \mathbb{F}_p[x^p].$$

Dies zeigt, dass das Bild $F(R)$ von F im Teilring $\mathbb{F}_p[x^p]$ von $\mathbb{F}_p[x]$ enthalten ist und beispielsweise x nicht in $F(R)$ liegt. Also ist F nicht surjektiv, erst recht kein Isomorphismus.