

**Aufgabe H17T1A1** (8 Punkte)

Sei  $K$  ein endlicher Körper. Zeigen Sie, dass das Produkt aller Elemente  $\neq 0$  in  $K$  gleich  $-1$  ist.

*Lösung:*

Sei  $S = \{\alpha \in K^\times \mid \alpha \neq \alpha^{-1}\}$ . Wir zeigen, dass die Menge  $S$  in lauter zweielementige Teilmengen aufgeteilt werden kann, deren Elemente sich jeweils zu 1 multiplizieren. Dazu überprüfen wir, dass durch  $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \beta \in \{\alpha, \alpha^{-1}\}$  eine Äquivalenzrelation auf  $S$  definiert ist.

Die Reflexivität ist erfüllt, denn für jedes  $\alpha \in S$  gilt  $\alpha \in \{\alpha, \alpha^{-1}\}$ . Aus  $\alpha \sim \beta$  folgt  $\beta = \alpha$  oder  $\beta = \alpha^{-1}$ , also auch  $\alpha = \beta$  oder  $\alpha = \beta^{-1}$  und somit  $\beta \sim \alpha$ . Also ist die Relation  $\sim$  auch symmetrisch. Zum Nachweis der Transitivität seien  $\alpha, \beta, \gamma \in S$  mit  $\alpha \sim \beta$  und  $\beta \sim \gamma$  vorgegeben. Ist  $\alpha = \beta$  oder  $\beta = \gamma$ , dann folgt  $\alpha \sim \gamma$  unmittelbar. Ansonsten gilt  $\beta = \alpha^{-1}$  und  $\gamma = \beta^{-1}$ , also  $\gamma = (\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$  und somit ebenfalls  $\alpha \sim \gamma$ . Insgesamt ist  $\sim$  also tatsächlich eine Äquivalenzrelation auf  $S$ .

Für jedes  $\alpha \in S$  die Äquivalenzklasse  $[\alpha]$  gegeben durch  $[\alpha] = \{\alpha, \alpha^{-1}\}$  und zweielementig. Bezeichnen wir mit  $R \subseteq S$  ein Repräsentantensystem von  $\sim$ , dann kann  $S$  als disjunkte Vereinigung  $S = \bigcup_{\alpha \in R} [\alpha]$  dargestellt werden, und wir erhalten

$$\prod_{\gamma \in S} \gamma = \prod_{\alpha \in R} \prod_{\gamma \in [\alpha]} \gamma = \prod_{\alpha \in R} \prod_{\gamma \in \{\alpha, \alpha^{-1}\}} \gamma = \prod_{\alpha \in R} (\alpha \cdot \alpha^{-1}) = \prod_{\alpha \in R} 1_K = 1_K.$$

Nun sehen wir uns noch die Elemente in  $K^\times \setminus S$  an. Ein Element  $\alpha \in K^\times$  liegt genau dann in  $K^\times \setminus S$ , wenn  $\alpha = \alpha^{-1} \Leftrightarrow \alpha^2 - 1_K = 0_K$  gilt, wenn also  $\alpha$  eine Nullstelle von  $f = x^2 - 1_K \in K[x]$  ist. Offenbar sind  $\pm 1_K$  beides Nullstellen von  $f$ . Betrachten wir nun zunächst den Fall  $\text{char}(K) \neq 2$ . Als Polynom vom Grad 2 über einem Körper hat  $f$  höchstens zwei Nullstellen, also ist  $K^\times \setminus S$  in diesem Fall zweielementig, und es ist  $K^\times \setminus S = \{\pm 1_K\}$ . Wir erhalten

$$\prod_{\gamma \in K^\times} \gamma = \left( \prod_{\gamma \in S} \gamma \right) \cdot 1_K \cdot (-1_K) = 1_K \cdot 1_K \cdot (-1_K) = -1_K.$$

Im Fall  $\text{char}(K) = 2$  gilt  $-1_K = 1_K$ ,  $2_K = 1_K + 1_K = 0_K$  und  $f = x^2 - 1_K = x^2 - 2_K x + 1_K = (x - 1_K)^2$ . Dies zeigt, dass  $1_K$  in diesem Fall die einzige Nullstelle von  $f$  ist, also  $K^\times \setminus S = \{1_K\}$  gilt. Auch dieses Mal erhalten wir

$$\prod_{\gamma \in K^\times} \gamma = \left( \prod_{\gamma \in S} \gamma \right) \cdot 1_K = 1_K \cdot 1_K = 1_K = -1_K.$$