Aufgabe H16T3A4 (3+3+6 Punkte)

In einem assoziativen Ring R mit Einselement gelte für jedes $x \in R$ entweder $x^2 = 1$ oder $x^n = 0$ für ein $n \geq 1$.

(a) Beweisen Sie, dass die Einheitengruppe von R kommutativ ist.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes Element $x \in R$ entweder x oder $1 - x$ eine Einheit ist.

(c) Beweisen Sie, dass R ein kommutativer Ring ist.

Lösung:

zu (a) Ist R ein Nullring, also $R = \{0_R\}$, dann ist die Kommutativität von R offensichtlich. Wir können also voraussetzen, dass R kein Nullring ist und folglich $0 \neq 1$ in R gilt. Gilt $a^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$, dann ist a keine Einheit von R. Denn gehen wir davon aus, dass a eine Einheit und $n \in \mathbb{N}$ minimal mit der Eigenschaft $a^n = 0$ ist, dann gibt es ein $b \in R$ mit $ab = 1$, und wir erhalten $a^{n-1} = a^{n-1}1 = a^{n-1}(ab) = a^n b = 0b = 0$, im Widerspruch zur Minimalität von n.

Seien nun $a, b \in R^\times$ vorgegeben. Da $a^n = 0$ bzw. $b^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ausgeschlossen wurde, muss $a^2 = b^2 = 1$ gelten. Da auch ab eine Einheit ist, gilt ebenso $(ab)^2 = 1$. Es folgt $ba = b^{-1}a^{-1} = (ab)^{-1} = ab$.

zu (b) Wir zeigen durch vollständige Induktion: Ist $a \in R$ und $a^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$, dann ist $1 - a$ eine Einheit. Daraus folgt die gewünschte Aussage, denn laut Angabe ist jedes $a \in R$ entweder eine Einheit, oder es gilt $a^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Im Fall $n = 1$ ist die Aussage klar, denn offenbar ist $1 - a^1 = 1 - 0 = 1$ eine Einheit in R. Sei nun $n > 1$, und setzen wir die Aussage für Werte kleiner als n voraus. Sei $a \in R$ mit $a^n = 0$. Wegen $n > 1$ ist $2n - 2 \geq n$. Es gilt also $(a^2)^{n-1} = a^{2n-2} = 0$, folglich ist $1 - a^2$ auf Grund der Induktionsvoraussetzung eine Einheit. Es gibt also ein $c \in R$ mit $c(1 - a^2) = (1 - a^2)c = 1$. Es folgt $c(1 + a)(1 - a) = (1 - a)(1 + a)c = 0$. Diese Gleichungen zeigen, dass auch $1 - a$ eine Einheit in R ist.

Hinweis:

Im letzten Schritt wurde verwendet, dass jedes Element a in einem nicht-kommutativen Ring, das ein Links- und ein Rechtsinverses besitzt, eine Einheit ist. Gibt es nämlich $b, c \in R$ mit $ba = ac = 1$, dann folgt $b = b1 = b(ac) = (ba)c = 1c = c$, und somit ist b ein multiplikatives Inverses von a.

zu (c) Seien $a, b \in R$ vorgegeben. Zu zeigen ist $ab = ba$. Sind a und b Einheiten, dann ist die Gleichung nach Teil (a) erfüllt. Ansonsten gibt es die folgenden drei Möglichkeiten.

1. Fall: $\quad a \in R^\times,\, b \notin R^\times$

Nach Teil (b) ist $1-b$ eine Einheit, also gilt $a(1-b) = (1-b)a$. Es folgt $a - ab = a - ba$, also $-ab = -ba$ und damit auch $ab = ba$.

2. Fall: $\quad a \notin R^\times,\, b \in R^\times$

In diesem Fall ist $1-a$ eine Einheit in R. Es gilt also $(1-a)b = b(1-a)$. Daraus folgt $b - ab = b - ba$, also wiederum $-ab = -ba$ und $ab = ba$.

3. Fall: $\quad a, b \notin R^\times$

Da $1-a$ eine Einheit ist, gilt $(1-a)b = b(1-a)$ auf Grund des 2. Falls. Wieder erhalten wir $b-ab = b-ba$, also $-ab = -ba$ und $ab = ba$.