Aufgabe H16T3A3 (2+2+2+6 Punkte)

Es sei G eine Gruppe der Ordnung $|G| = 7^2 \cdot 8$. Mit Syl_7 bezeichnen wir die Menge der 7-Sylowgruppen und mit n_7 die Anzahl der 7-Sylowgruppen von G. Zeigen Sie mithilfe der folgenden Schritte, dass G nicht einfach ist.

(a) Begründen Sie, dass $n_7 \in \{1, 8\}$ gilt.

(b) Begründen Sie, dass G im Fall $n_7 = 1$ nicht einfach ist.

(c) Begründen Sie, dass

$$\cdot : G \times \mathrm{Syl}_7 \longrightarrow \mathrm{Syl}_7 \quad , \quad (g, P) \mapsto gPg^{-1}$$

eine transitive Operation von G auf Syl_7 ist.

(d) Begründen Sie, dass G auch im Fall $n_7 = 8$ nicht einfach ist.

Lösung:

zu (a) Auf Grund der Sylowsätze ist n_7 ein Teiler von 8, es gilt also $n_7 \in \{1, 2, 4, 8\}$. Außerdem gilt $n_7 \equiv 1 \bmod 7$. Wegen $2 \not\equiv 1 \bmod 7$ und $4 \not\equiv 1 \bmod 7$ muss also $n_7 \in \{1, 8\}$ gelten.

zu (b) Im Fall $n_7 = 1$ ist laut Vorlesung die einzige 7-Sylowgruppe P von G ein Normalteiler von G. Nach Definition der 7-Sylowgruppen gilt $|P| = 7^2$, insbesondere $1 < |P| < |G|$ und damit $P \neq \{e_G\}, G$. Dies zeigt, dass P ein *nichttrivialer* Normalteiler von G und G somit nicht einfach ist.

zu (c) Zunächst überprüfen wir, dass durch $\cdot$ tatsächlich eine Gruppenoperation von G auf Syl_7 definiert ist. Für alle $g, h \in G$ und $P \in \mathrm{Syl}_7$ gilt $e_G \cdot P = e_G P e_G^{-1} = P$ und

$$g \cdot (h \cdot P) \quad = \quad g \cdot (hPh^{-1}) \quad = \quad g(hPh^{-1})g^{-1} \quad = \quad (gh)P(gh)^{-1} \quad = \quad (gh) \cdot P.$$

Also liegt tatsächlich eine Gruppenoperation vor. Sei $P \in \mathrm{Syl}_7$. Die Gruppenoperation ist transitiv genau dann, wenn die Bahn $G(P)$ von P unter der Operation mit ganz Syl_7 übereinstimmt. Die Inklusion $G(P) \subseteq \mathrm{Syl}_7$ ist nach Definition der Bahn offensichtlich. Ist umgekehrt $Q \in \mathrm{Syl}_7$ vorgegeben, dann existiert ein $g \in G$ mit $Q = gPg^{-1}$, da auf Grund der Sylowsätze je zwei 7-Sylowgruppen zueinander konjugiert sind. Es gilt also $Q = g \cdot P \in G(P)$. Damit ist die Transitivität nachgewiesen.

zu (d) Setzen wir nun $n_7 = 8$ voraus. Laut Vorlesung definiert die Operation von G auf Syl_7 einen Homomorphismus $\phi : G \to \mathrm{Per}(\mathrm{Syl}_7)$ in die Permutationsgruppe $\mathrm{Per}(\mathrm{Syl}_7)$ der achtelementigen Menge Syl_7, der mit der Gruppenoperation durch $\phi(g)(P) = g \cdot P$ für alle $g \in G$ und $P \in \mathrm{Syl}_7$ zusammenhängt. Als Kern eines Homomorphismus ist $N = \ker(\phi)$ ein Normalteiler von G. Um zu zeigen, dass G nicht einfach ist, weisen wir nach, dass N kein trivialer Normalteiler von G ist, also weder mit $\{e_G\}$ noch mit G übereinstimmt.

Nehmen wir zunächst an, dass $\ker(\phi) = N = \{e_G\}$ gilt. Dann ist ϕ injektiv, und somit ist G dann isomorph zur Untergruppe $\phi(G)$ von $\mathrm{Per}(\mathrm{Syl}_7)$. Nach dem Satz von Lagrange ist dann $|G| = |\phi(G)| = 7^2 \cdot 8$ ein Teiler von $|\mathrm{Per}(\mathrm{Syl}_7)|$. Aber wegen $|\mathrm{Syl}_y| = n_7 = 8$ ist $\mathrm{Per}(\mathrm{Syl}_7)$ isomorph zu S_8 und somit $|\mathrm{Per}(\mathrm{Syl}_7)| = |S_8| = 8!$. Die Zahl $7^2 \cdot 8$ ist kein Teiler von $8!$, da die Primzahl 7 die Zahl $8!$ nur einfach teilt. Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme $N = \{e_G\}$ falsch war.

Nehmen wir nun an, es gilt $\ker(\phi) = N = G$. Dann gilt $\phi(g) = \mathrm{id}_{\mathrm{Syl}_7}$ für alle $g \in G$. Für alle $g \in G$ und $P \in \mathrm{Syl}_7$ folgt daraus $gPg^{-1} = g \cdot P = \phi(g)(P) = \mathrm{id}_{\mathrm{Syl}_y}(P) = P$. Dies bedeutet, dass jede 7-Sylowgruppe P ein Normalteiler von G ist. Aber dies ist auf Grund der Sylowsätze nur im Fall $n_7 = 1$ möglich, was zur Voraussetzung $n_7 = 8$ im Widerspruch steht. Also ist auch der Fall $N = G$ ausgeschlossen.