Aufgabe H16T3A1 (12 Punkte)

Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\phi : V \to V$ ein Endomorphismus von V, dessen charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Beweisen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) Alle Eigenräume von ϕ sind eindimensional.

(ii) Zu jedem Eigenwert von ϕ existiert in der Jordanschen Normalform genau ein Jordanblock.

(iii) Das Minimalpolynom und das charakteristische Polynom von ϕ sind gleich.

Lösung:

Sei $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ eine geordnete Basis von V und $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$, wobei $\mathcal{M}_{n,K}$ die Menge der $n \times n$-Matrizen über K bezeichnet. Auf Grund der Voraussetzungen können wir annehmen, dass $\mathcal{B}$ so gewählt wurde, dass sich die Matrix A in Jordanscher Normalform befindet.

„(i) $\Rightarrow$ (ii)“ Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von ϕ (und somit auch on A). Laut Vorlesung stimmt die Anzahl der Jordanblöcke in A zum Eigenwert λ mit der geometrischen Vielfachheit des Eigenwerts λ überein. Ist der Eigenraum $\mathrm{Eig}(\phi, \lambda)$ eindimensional, gibt es in A zum Eigenwert λ also genau einen Jordanblock.

„(ii) $\Rightarrow$ (iii)“ Seien $\lambda_1, ..., \lambda_r \in K$ die verschiedenen Eigenwerte von ϕ (bzw. A). Dann haben das Minimalpolynom $\mu_\phi = \mu_A \in K[x]$ und das charakteristische Polynom $\chi_\phi = \chi_A \in K[x]$ von ϕ (bzw. A) die Form

$$\mu_\phi = \prod_{i=1}^{r} (x - \lambda_i)^{e_i} \qquad \text{und} \qquad \chi_\phi = \prod_{i=1}^{r} (x - \lambda_i)^{m_i}$$

mit geeigneten $e_1, ..., e_r \in \mathbb{N}$ und $m_1, ..., m_r \in \mathbb{N}$, wobei $m_1 + ... + m_r = n$ gilt. Da μ_A nach dem Satz von Cayley-Hamilton ein Teiler von χ_A ist, gilt außerdem $e_i \leq m_i$ für $1 \leq i \leq r$. Laut Vorlesung gibt dabei e_i jeweils die Zeilenzahl (oder Spaltenzahl) des größten Jordanblocks zum Eigenwert λ_i an, und die gesamte Zeilenzahl aller Jordanblöcke zu diesem Eigenwert ist gleich m_i. Existiert nun für jedes $i \in \{1, ..., r\}$ genau ein Jordanblock zum Eigenwert λ_i, dann muss $e_i = m_i$ für $1 \leq i \leq r$ gelten. Daraus wiederum folgt $\mu_\phi = \chi_\phi$.

„(iii) $\Rightarrow$ (i)“ Seien die Bezeichnungen λ_i, e_i, m_i wie im letzten Absatz gewählt. Gilt $\mu_\phi = \chi_\phi$, dann kann es pro Eigenwert λ_i nur einen Jordanblock geben (denn gäbe es mehr als einen Jordanblock, dann wäre die Zeilenzahl e_i des größten Blocks echt kleiner als die gesamte Zeilenzahl m_i aller Blöcke). Weil die geometrische Vielfachheit vo λ_i gleich der Anzahl der Jordanblöcke zu diesem Eigenwert ist, ist die geometrische Vielfachheit sämtlicher Eigenwerte gleich 1, und die Eigenräume sind somit eindimensional.