Aufgabe H16T2A3 (2+3+3+3 Punkte)

Im Folgenden sei K der jeweils angegebene Körper. Entscheiden Sie jeweils, ob die Matrix A über K diagonalisierbar ist, und begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $K = \mathbb{C}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \mathbb{R}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \mathbb{F}_5$

(d) $A = \begin{pmatrix} t+1 & 1 \\ t-1 & 2t-1 \end{pmatrix}$, K ist der rationale Funktionenkörper $\mathbb{R}(t)$.

Lösung:

zu (a) Diese Matrix ist nicht diagonalisierbar. Denn das charakteristische Polynom von A ist gegeben durch $\chi_A = (x-2)^3$, und somit ist 2 ein Eigenwert der algebraischen Vielfachheit 3. Andererseits ist die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 2 gleich der Anzahl der Jordankästchen, und diese beträgt nur 2. Wäre A diagonalisierbar, dann müssten geometrische und algebraische Vielfachheit jedes Eigenwerts übereinstimmen.

zu (b) Auch diese Matrix ist nicht diagonalisierbar. Das charakteristische Polynom dieser Matrix ist gegeben durch

$$\chi_A \quad = \quad \det \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} \quad = \quad x^2 + 1.$$

Da $x^2 + 1$ keine reelle Nullstelle besitzt, zerfällt χ_A über $\mathbb{R}$ nicht in Linearfaktoren. Dies ist aber eine notwendige Bedingung für Diagonalisierbarkeit.

zu (c) Diese Matrix ist diagonalisierbar. Das charakteristische Polynom ist gegeben durch $\chi_A = x^2 + \bar{1} = (x - \bar{2})(x - \bar{3})$, zerfällt über $\mathbb{F}_5$ also in Linearfaktoren. Die beiden Eigenwerte von A sind $\bar{2}$ und $\bar{3}$. Da jeder Eigenwert mindestens geometrische Vielfachheit 1 besitzt, und andererseits die geometrische nicht größer als die algebraische Vielfachheit sein kann, stimmen geometrische und algebraische Vielfachheit für beide Eigenwerte überein. Damit ist das Diagonalisierbarkeitskriterium für diese Matrix erfüllt.

zu (d) Auch diese Matrix ist diagonalisierbar. Ihr charakteristisches Polynom ist gegeben durch

$$\chi_A \quad = \quad \det \begin{pmatrix} x-(t+1) & -1 \\ -(t-1) & x-(2t-1) \end{pmatrix} \quad = \quad (x-(t+1))(x-(2t-1)) - (1-t)\cdot(-1)$$

$$= \quad x^2 - (t+1)x - (2t-1)x + (t+1)(2t-1) - t + 1$$

$$= \quad x^2 - 3tx + 2t^2 + 2t - t - 1 - t + 1 \quad = \quad x^2 - 3tx + 2t^2.$$

Die Nullstellen dieses Polynoms im Körper $\mathbb{R}(t)$ findet man zum Beispiel durch Bildung der quadratischen Ergänzung.

$$x^2 - 3tx + 2t^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3tx = -2t^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3tx + (\tfrac{3}{2}t)^2 = \tfrac{9}{4}t^2 - 2t^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x - \tfrac{3}{2}t)^2 = \tfrac{1}{4}t^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x - \tfrac{3}{2}t)^2 - (\tfrac{1}{2}t)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x - \tfrac{3}{2}t - \tfrac{1}{2}t)(x - \tfrac{3}{2}t + \tfrac{1}{2}t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2t)(x-t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{t, 2t\}$$

Dies zeigt, dass t und $2t$ die beiden Eigenwerte von A sind. Wegen $\chi_A = (x-t)(x-2t)$ zerfällt A über $\mathbb{R}(t)$ in Linearfaktoren, und die algebraische Vielfachheit beider Eigenwerte ist gleich 1. Dasselbe Argument wie in Teil (c) zeigt, dass algebraische und geometrische Vielfachheit beider Eigenwerte jeweils übereinstimmen. Also ist auch hier das Diagonalisierbarkeitskriterium erfüllt.