Aufgabe H16T2A2 (6+10 Punkte)

Seien A, B abelsche Gruppen und $\phi : B \to \mathrm{Aut}(A)$ ein Homomorphismus von B in die Gruppe der Automorphismen von A. Das *semidirekte Produkt* $A \rtimes_\phi B$ ist die folgendermaßen definierte Gruppe:

$$\begin{aligned} A \rtimes_\phi B &:= \{(a,b) \mid a \in A \ , \ b \in B\} \\ (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) &:= (a_1 \phi(b_1)(a_2), b_1 b_2). \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass $A \rtimes_\phi B$ genau dann abelsch ist, wenn ϕ trivial ist, also $\phi(b) = \mathrm{id}_A$ für alle $b \in B$ gilt.

(b) Konstruieren Sie eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung 2015.

Lösung:

zu (a) „$\Leftarrow$“ Seien $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \rtimes_\phi B$ vorgegeben, und setzen wir $\phi(b) = \mathrm{id}_A$ für alle $b \in B$ voraus. Dann gilt einerseits

$$(a_2, b_2) \cdot (a_1, b_1) \quad = \quad (a_2 \phi(b_2)(a_1), b_2 b_1) \quad = \quad (a_2 \mathrm{id}_A(a_1), b_2 b_1) \quad = \quad (a_2 a_1, b_1 b_2) \quad = \quad (a_1 a_2, b_1 b_2)$$

andererseits aber auch

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) \quad = \quad (a_1 \phi(b_1)(a_2, b_1 b_2) \quad = \quad (a_1 \mathrm{id}_A(a_2), b_1 b_2) \quad = \quad (a_1 a_2, b_1 b_2).$$

also $(a_2, b_2) \cdot (a_1, b_1) = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)$. Dies zeigt, dass die Gruppe abelsch ist.

„$\Rightarrow$“ Nach Voraussetzung ist die Gruppe G abelsch. Bezeichnen wir mit e_A, e_B die Neutralelemente der Gruppen A und B, dann gilt für alle $a \in A$ und $b \in B$ jeweils

$$(e_A, b) \cdot (a, e_B) = (a, e_B) \cdot (e_A, b) \quad \Leftrightarrow \quad (e_A \phi(b)(a), b e_B) = (a \phi(e_B)(e_A), e_B b) \quad \Leftrightarrow$$

$$(\phi(b)(a), b) = (a \mathrm{id}_A(e_A), e_B b) \quad \Leftrightarrow \quad (\phi(b)(a), b) = (a e_A, b)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\phi(b)(a), b) = (a, b) \quad \Leftrightarrow \quad \phi(b)(a) = a$$

Aus $\phi(b)(a) = a$ für alle $a \in A$, $b \in B$ folgt $\phi(b) = \mathrm{id}_A$ für alle $b \in B$.

zu (b) Es gilt $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Wir konstruieren mit Hilfe von Teil (a) zunächst eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung $5 \cdot 31 = 155$. Da 31 eine Primzahl ist, handelt es sich bei $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}1)^\times$ um eine zyklische Gruppe der Ordnung 30; es gilt also $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/31\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}1)^\times \cong \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$. Da auch $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ zyklisch ist, können wir einen nichttrivialen Homomorphismus $\psi : \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ definieren, indem wir $\bar{1}$ auf ein Element in $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ der Ordnung 5 abbilden, zum Beispiel durch $\psi(\bar{1}) = \bar{6}$. Durch Komposition mit dem Isomorphismus von oben erhält man einen nichttrivialen Homomorphismus $\phi : \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/31\mathbb{Z})$, und nach Teil (a) ist $\mathbb{Z}/31\mathbb{Z} \rtimes_\phi \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 155. Also ist durch $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/31\mathbb{Z} \rtimes_\phi \mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung $13 \cdot 155 = 2015$ definiert.

Hinweis:

Wenngleich es in der Aufgabe wohl nicht gefordert war, kann der nichttriviale Homomorphismus $\phi : \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/31\mathbb{Z})$ auch ganz explizit angegeben werden. Da die Gruppe $(\mathbb{Z}/31\mathbb{Z}, +)$ von $\bar{1}$ erzeugt wird, ist jedes $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/31\mathbb{Z})$ durch das Bild $\bar{a} = \sigma(\bar{1})$ eindeutig bestimmt. Da σ bijektiv ist, handelt es sich dabei um ein Element aus $(\mathbb{Z}/31\mathbb{Z})^\times$; es gilt also $\bar{a} = a + 31\mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a, 31) = 1$. Für jedes $\bar{a}$ in $(\mathbb{Z}/31\mathbb{Z})^\times$ sei $\sigma_{\bar{a}} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/31\mathbb{Z})$ der eindeutig bestimmte Automorphismus mit $\sigma_{\bar{a}}(\bar{1}) = \bar{a}$. Dann ist der Isomorphismus $(\mathbb{Z}/31\mathbb{Z})^\times \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/31\mathbb{Z})$ gegeben durch $\bar{a} \mapsto \sigma_{\bar{a}}$, und es gilt $\sigma_{\bar{a}}(\bar{b}) = \overline{ab}$ für alle $\bar{a} \in (\mathbb{Z}/31\mathbb{Z})^\times$ und $b \in \mathbb{Z}/31\mathbb{Z}$.

Einen Isomorphismus $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \cong (\mathbb{Z}/31\mathbb{Z})^\times$ erhält man, indem man $\bar{1} \in \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ auf einen Erzeuger von $(\mathbb{Z}/31\mathbb{Z})^\times$, also eine Primitivwurzel modulo 31 abbildet. Nach dem Kriterium aus der Zahlentheorie-Vorlesung ist $\bar{3}$ wegen $\bar{3}^{15} = -\bar{1} \neq \bar{1}$, $\bar{3}^{10} = \overline{25} \neq \bar{1}$ $\bar{3}^6 = \overline{16} \neq \bar{1}$ eine solche Primitivwurzel. Also ist durch $\alpha(\bar{1}) = \bar{3}$ ein Isomorphismus $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/31\mathbb{Z})^\times$ definiert. Dieser ist gegeben durch $\alpha(c + 30\mathbb{Z}) = \bar{3}^c$ für alle $c \in \mathbb{Z}$. Insgesamt erhält man also durch $\phi(\bar{1}) = \sigma_{\bar{3}}$ also einen eindeutig bestimmten, nichttrivialen Homomorphismus $\phi : \mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/31\mathbb{Z})$. Explizit ist dieser gegeben durch $\phi(c + 30\mathbb{Z}) = (\sigma_{\bar{3}})^c$ für alle $c \in \mathbb{Z}$.