Aufgabe H16T2A1 (6+2 Punkte)

Sei $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ die obere Halbebene und $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ die Gruppe der reellen (2×2)-Matrizen mit Determinante 1. Die Abbildung

$$\rho : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times H \longrightarrow H \quad , \quad \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} , z \right) \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

definiert eine Gruppenoperation von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ auf H.

(a) Geben Sie die Bahnen von ρ an.

(b) Geben Sie den Stabilisator von $i \in H$ an.

Lösung:

zu (a) Für alle $a \in \mathbb{R}^+$ und $b \in \mathbb{R}$ liegt die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ in $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, und es gilt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \cdot i \quad = \quad \frac{a \cdot i + b}{0 + a^{-1}} \quad = \quad a^2 \cdot i + ab.$$

Dies zeigt $ab + ia^2 \in G(i)$ für alle $a \in \mathbb{R}^+$ und $b \in \mathbb{R}$. Jeder Punkt $z = x + iy$ mit $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^+$ kann auf diese Weise dargestellt werden, denn definieren wir $a = \sqrt{y}$ und $b = xa^{-1} = x(\sqrt{y})^{-1}$, dann ist $z = ab + ia^2$ erfüllt. Dies zeigt, dass $G(i) = H$ die einzige Bahn der Operation ρ ist. (Mit anderen Worten, die Operation ist transitiv.)

zu (b) Für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ gilt die Äquivalenz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot i = i \quad \Leftrightarrow \quad \frac{ai+b}{ci+d} = i \quad \Leftrightarrow \quad ai + b = i(ci+d) \quad \Leftrightarrow \quad b + ia = (-c) + id$$

$$\Leftrightarrow \quad c = -b \text{ und } d = a$$

Die Elemente im Stabilisator sind also genau die Elemente der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \qquad a^2 + b^2 = \det \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = 1.$$

An diesem Punkt kann der Aufgabenteil als gelöst angesehen werden, das Ergebnis lässt sich aber noch etwas besser darstellen. Ein Paar (a, b) reeller Zahlen erfüllt die Gleichung $a^2 + b^2 = 1$ genau dann, wenn ein $\theta \in \mathbb{R}$ mit $\cos(\theta) = a$ und $\sin(\theta) = -b$ existiert. Es gilt dann

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Bezeichnen wir die Matrix rechts jeweils mit $D(\theta)$, dann gilt für den Stabilisator also $G_i = \{D(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\} = \{D(\theta) \mid 0 \le \theta < 2\pi\}$. Die Matrix $D(\theta)$ bewirkt jeweils eine Drehung um den Koordinatenursprung mit dem Winkel θ, und die Gruppe bestehend aus diesen Drehungen ist die *spezielle orthognale Gruppe* $\mathrm{SO}(2)$.