Aufgabe H16T1A3 (12 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Zu jedem $a \in R$ existiere ein $b \in R$ mit $a^2 \cdot b = a$.

(a) Zeigen Sie, dass R reduziert ist, das heißt, das 0 das einzige nilpotente Element in R ist.

(b) Zeigen Sie weiter, dass jedes Primideal $\mathfrak{p}$ in R maximal ist.

Lösung:

zu (a) Wir zeigen durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$: Ist $a \in R$ mit $a^n = 0$, dann folgt $a = 0$. Für $n = 1$ ist diese Aussage offensichtlich. Sei nun $n > 1$, und setzen wir die Aussage für Potenzen kleiner als n voraus. Sei $a \in R$ mit $a^n = 0$. Nach Voraussetzung existiert ein $b \in R$ mit $a^2 \cdot b = a$. Nun gilt $a^{n-1} = (a^2 \cdot b)^{n-1} = a^{2n-2} \cdot b^{n-1}$. Wegen $n > 1$ ist $2n - 2 \geq n + n - 2 \geq n$; daraus folgt $a^{2n-2} \cdot b^{n-1} = 0$ und somit $a^{n-1} = 0$. Auf Grund der Induktionsvoraussetzung erhalten wir $a = 0$.

zu (b) Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in R. Laut Vorlesung ist der Faktorring $\bar{R} = R/\mathfrak{p}$ dann ein Integritätsbereich. Wir zeigen, dass $\bar{R}$ ein Körper ist. Sei dazu $\bar{a} \in \bar{R}$ mit $\bar{a} \neq \bar{0}$. Dann gibt es ein $a \in R \setminus \mathfrak{p}$ mit $\bar{a} = a + \mathfrak{p}$. Auf Grund der Voraussetzung existiert für dieses Element a ein $b \in R$ mit $a^2 \cdot b = a$. Weil $\bar{R}$ ein Integritätsbereich ist, können wir auf die Gleichung $\bar{a}^2 \cdot \bar{b} = \bar{a}$ die Kürzungsregel anwenden und erhalten $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{1}$. Als Integritätsbereich, in dem jedes Element ungleich Null ein multiplikatives Inverses besitzt, ist $\bar{R} = R/\mathfrak{p}$ ein Körper. Daraus wiederum folgt, dass $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal ist.