Aufgabe H16T1A2 (12 Punkte)

Sei p eine Primzahl und $k \leq p-2$. Zeigen Sie, dass die Einheitsmatrix I_k die einzige Matrix $A \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{Q})$ mit der Eigenschaft $A^p = I_k$ ist.

Lösung:

Sei $A \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{Q})$ mit $A^p - I_k = 0$. Diese Gleichung zeigt, dass das Minimalpolynom $\mu_{\mathbb{Q},A} \in \mathbb{Q}[x]$ ein normierter, nicht-konstanter Teiler von $x^p - 1$ ist. Die irreduziblen Faktoren von $x^p - 1$ sind $x - 1$ und $\Phi_p = x^{p-1} + x^{p-2} + ... + x + 1$, das p-te Kreisteilungspolynom. Die einzigen normierten, nicht-konstanten Teiler von $x^p - 1$ sind also die Polynome $x - 1$, Φ_p und $x^p - 1$. Wegen $A \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{Q})$ ist das charakteristische Polynom $\chi_{\mathbb{Q},A}$ vom Grad k. Da $\mu_{\mathbb{Q},A}$ nach dem Satz von Cayley-Hamilton ein Teiler von $\chi_{\mathbb{Q},A}$ ist, folgt $\mathrm{grad}(\mu_{\mathbb{Q},A}) \leq k \leq p - 2$. Damit bleibt als einzige Möglichkeit $\mu_{\mathbb{Q},A} = x - 1$. Nach Definition des Minimalpolynoms gilt $A - I_k = \mu_{\mathbb{Q},A}(A) = 0$ und somit $A = I_k$.

Aus $A^p = I_k$ folgt also $A = I_k$. Umgekehrt erfüllt die Einheitsmatrix offenbar die Gleichung $I_k^p = I_k$.