Aufgabe H16T1A1 (12 Punkte)

Sei N ein auflösbarer Normalteiler einer endlichen Gruppe G und H eine weitere auflösbare Untergruppe von G. Zeigen Sie, dass

$$NH \quad = \quad \{nh \mid n \in N, h \in H\}$$

wieder eine auflösbare Untergruppe von G ist.

Lösung:

Auf Grund des Isomorphiesatzes für Gruppen ist $N \cap H$ ein Normalteiler vo H, und es existiert ein Isomorphismus $H/(N \cap H) \cong NH/N$. Allgemein gilt: Ist G_1 eine Gruppe und N_1 ein Normalteiler von G_1, so ist G_1 genau dann auflösbar, wenn G_1/N_1 und N_1 beide auflösbar sind. Aus der Auflösbarkeit von H folgt also die Auflösbarkeit von $H/(N \cap H)$. Auf Grund des Isomorphismus ist damit auch NH/N auflösbar. Aus der Auflösbarkeit von N und NH/N folgt wiederum die Auflösbarkeit von NH.